Lösning till MAN030 Flervariabelanalys del 1, 03 08 11

3. Sätter vi $f(x,y,z) = x^4y^2 + yz^3 + xz^3$ ges en normal till tangentplanet av $\text{grad}f(1,1,1)$. Vi har $\text{grad}f = (4x^3y^2 + z^3, 2x^4y + z^3, 3yz^2 + 3xz^2)$, så $(5,3,6)$ är en normal. Tangentplanet har därför ekvationen

$$0 = (5,3,6)\cdot(x-1, y-1, z-1).$$

Svar: $14 = 5x + 3y + 6z$.

4. Kedjeregeln ger

$$\begin{cases} f'_x &= 2xf'_u + 2xf'_v \\ f'_y &= 2yf'_u - 2yf'_v \end{cases}$$

så ekvationen blir $4f'_v = 4x^2y^2 = u^2 - v^2$ där vi använt att $x^2 = (u+v)/2$ och $y^2 = (u-v)/2$. Detta ger $f = u^2v/4 - v^3/12 + g(u)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion.

Svar: $f(x,y) = (x^2+y^2)^2(x^2-y^2)/4 - (x^2-y^2)^3/12 + g(x^2+y^2)$.

5. Det gäller att bestämma maximala värdet av $u = xy^2z^3$ i det kompakta området $3x + 2y + z = 18$, $x, y, z \geq 0$. Då detta inträffar är gradienten för u parallell med gradienten för $3x + 2y + z$ (bivillkoret). Längs randen till området (där någon av koordinaterna är noll) är nyttan (u) noll. Detta ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 18 \\ \text{grad}u \text{ och } (3,2,1) \text{ parallella} \end{cases}$$

Andra villkoret kan skrivas

$$\mathbf{0} = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2) \times (3,2,1),$$

som uttolkat ger oss ekvationerna ($x, y, z \neq 0$)

$$\begin{cases} 0 &= 6xy - 2xz \\ 0 &= 9xy - yz \\ 0 &= 6xz - 2yz \end{cases}$$

Detta ger $y = 3x$ och $z = 9x$ som i bivillkoret ger $3x + 6x + 9x = 18$, dvs $x = 1$.

Svar: $x = 1$, $y = 3$ och $z = 9$.

6. (a) Ja. T.ex.

$$\mathbf{f}(x,y) = ((1 - |y-1|)\cos 2\pi x, (1 - |y-1|)\sin 2\pi x)$$

(b) Nej. B är sammanhängande men det är inte A.

(c) Ja. T.ex.

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{cases} (x, 3/2 + |y - 3/2|) & \text{när} \quad y > 1 \\ (x, 1/2 - |y - 1/2|) & \text{när} \quad y < 1 \end{cases}$$

(d) Nej. C är kompakt men det är inte A.

7. (a) För partiell deriverbarhet i origo krävs att $(f(x,0)-f(0,0))/x$ och $(f(0,y)-f(0,0))/y$ ska ha gränsvärden när x respektive y går mot noll. Uttrycken är $(0-d)/x$ respektive $(0-d)/y$. Vi ser att vi ska välja $d=0$ och vi får då $f'_x(0,0)=0=f'_y(0,0)$ (oavsett hur vi väljer c) .

   (b) För differentierbarhet ska funktionen vara definierad i en omgivning till $(0,0)$. Vi ser att nämnaren i funktionen är noll när $0=x^2+y^2+cy=x^2+(y+c/2)^2-c^2/4$, som är ekvationen för en ellips genom origo när $c\neq 0$. Vi ska alltså välja $c=0$.

   För differentierbarhet ska sedan det relativa felet R gå mot noll när $(x,y)\to(0,0)$. Vi har

$$R=\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)(x-0)-f'_y(0,0)(y-0)}{|(x,y)|}=\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}.$$

   Polära koordinater ger $R=\cos^2\theta\sin\theta$, som inte har något gränsvärde oberoenden av θ när $r\to 0$.

Svar: a) Ja, välj $d=0$ och c godtyckligt. b) Nej.

8. Sätt $\mathbf{x}=\mathbf{a}+t\mathbf{e}_i$ och $\mathbf{y}=\mathbf{a}$. Förutsättningen ger

$$0\geq t\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{e}_i)-\mathbf{f}(\mathbf{a}))=t(f_i(\mathbf{a}+t\mathbf{e}_i)-f_i(\mathbf{a})).$$

Division med t^2 ger sedan

$$0\geq\frac{f_i(\mathbf{a}+t\mathbf{e}_i)-f_i(\mathbf{a})}{t}$$

vars gränsvärde när $t\to 0$, därför också blir ≤ 0:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{a})\leq 0.$$

Här är $\mathbf{a}$ godtyckligt.