# MAN 040 Linjär Algebra, del 1

## Blandade övningar 1-8

**J.L. 13 augusti 98**

1. Finns det några punkter i rummet som ligger i alla tre planen

$$10x + 9y + 8z = 11\ ,\ 7x + 6y + 5z = 12\ ,\ 4x + 3y + 2z = 13\quad ?$$

   Bestäm i så fall alla sådana punkter!

2. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & b_1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2ax_3 & = & b_2 \\ ax_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & b_3 \end{cases}$$

   där $a$ är en parameter.

   (a) Om vi sätter $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ så är $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ en lösning. För vilka värden på $a$ finns det även andra lösningar?

   (b) Karakterisera för vart och ett av dessa $a-$värden de $b_1, b_2, b_3$ för vilka systemet är lösbart!

3. Motivera varför vektorerna

$$(10, 9, 8, 7)\ ,\ (0, 6, 5, 4)\ ,\ (0, 0, 3, 2)\ ,\ (0, 0, 0, 1)$$

   är linjärt oberoende.

4. Standardmatrisen för den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Avgör om $T$ är surjektiv, injektiv eller bijektiv.

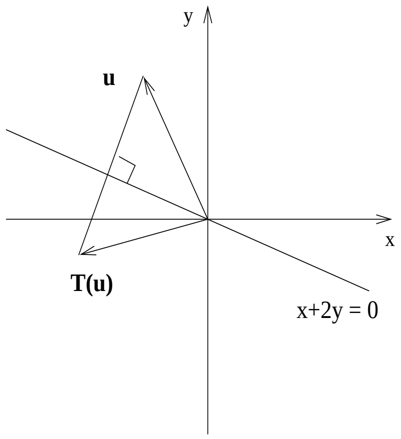
5. Vilka vektorer ligger i värdemängden för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vars standardmatris är

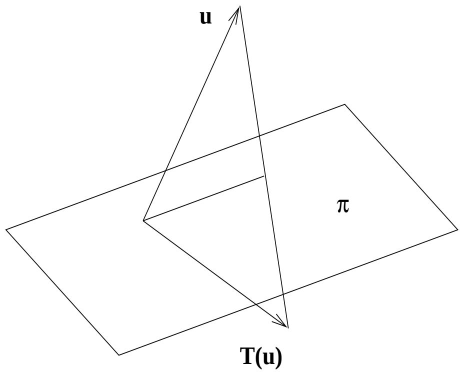
$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\quad ?$$

   Visa också att $T \circ T = T$.

6. Bestäm matrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbildar vektorn $\mathbf{u}$ på dess spegelbild i linjen $x + 2y = 0$. (Se vänstra figuren nedan.)

7. Bestäm matrisen $A$ för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som avbildar vektorn $\mathbf{u}$ på dess spegelbild i planet $\pi : x - 2y + 3z = 0$. (Se högra figuren.) Motivera utan att räkna varför $A^2 = I$.




8. En ljusstråle sänds från punkten $(1, -3, 1)$ i riktningen $(1, 0, -2)$ och reflekteras i planet $x + 2y = 1$. Var träffar ljusstrålen planet $x + y + z = -18$?

## Svar

1. $x = 14 + z, y = -\frac{43}{3} - 2z, z$ fri.
2. $(a) + (b) : a = -1, b_2 + 2b_3 = 0; a = 3, b_2 - 2b_1 = 0$
3. Lös systemet $x_1 v_1 + \cdots x_4 v_4 = 0$ där $v_1, \ldots, v_4$ är de givna vektorerna.
4. $T$ är injektiv, surjektiv och (således) bijektiv.
5. Värdemängden är $\{(x, y, z, w) : x + y + z + w = 0\}$.
6. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$
7. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$
8. I punkten $(10, -7, -21)$.