MATEMATIK
Göteborgs Universitet
J.L.

Datum: 1998-10-30
Hjälpmedel: Inga

Tid: 08.45-13.45
Telefonvakt: Sebastian Sandberg
Tel.: 0740-479626

Tentamensskrivning i Linjär Algebra (MAN040), del 1

Teoriuppgifter

1. Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Visa att det finns en entydigt bestämd matris A, så att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Beskriv hur kolonnerna i A ser ut! (3p)

2. Avgör vilka av följande tre utsagor som är sanna och vilka som är falska. Bevisa de sanna utsagorna och motbevisa de falska, till exempel med hjälp av ett motexempel. Utsagorna handlar om $2 \times 2-$ matriser A och B.

   (a) Om A och B är radekvivalenta, så har A och B samma egenvärden.

   (b) Om A och B är inverterbara, så är A och B radekvivalenta .

   (c) Om A och B kommuterar, så är $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

   (3p)

Problemuppgifter

3. (a) Bestäm baser för nollrummet och kolonnrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   (b) För vilka parametervärden p är systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart om $\mathbf{b} = [1\ 2\ p]^T$. Bestäm lösningarna för dessa värden på p!

   (4p)

4. Linjerna ℓ_1 och ℓ_2 ligger båda i planet $x + y + z = 3$. Linjen ℓ_1 ligger dessutom i planet $2x + y + 3z = 0$, medan ℓ_2 ligger i planet $2x + y = 0$. Visa att linjerna skär varandra i en punkt. Bestäm skärningspunkten samt vinkeln mellan linjerna! (3p)

5. Välj en övre triangulär $3 \times 3-$matris med följande egenskaper:

   (a) alla diagonalelementen är lika,

   (b) matrisens nollskilda element är fyra olika hela tal,

   (c) matrisen är inverterbar.

   Bestäm sedan matrisens invers! (3p)

6. Betrakta följande fyra vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 2, p, 3),\ \mathbf{u}_2 = (1, 1, 1, 1),\ \mathbf{u}_3 = (2, 1, 0, p),\ \mathbf{u}_4 = (3, 2, -5, 1)$$

   Om $p = 0$ så är $\mathbf{u}_1$ en linjärkombination av de tre övriga vektorerna. Bestäm denna linjärkombination! För vilka andra värden på p är någon av vektorerna en linjärkombination av de övriga? (3p)

VÄND!

7. Visa att

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

är matris för spegling i ett plan genom origo! Vilket är planet? Bestäm matrisens egenvärden och motsvarande egenrum! (3p)

8. Matrisen

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

är diagonaliserbar och satisfierar matrisekvationen $X^2 = I$. Vad kan sägas om a, b, c och d ? (3p)

Skrivningen beräknas vara färdigrättad 6 november, efter kl. 14.
Resultaten anslås i bottenvåningen på Matematiskt Centrum (MC).
Du kan också få veta resultatet genom att ringa nummer 772 35 09, efter kl. 14.
Din rättade skrivning kan hämtas efter angivet datum i mottagningsrummet
(MC rum 1202D) , måndag - fredag kl. 12.30 - 13