Linjär Algebra, del 2, HT 98

Blandade övningar 46-62

J.L. 2 oktober 1998

46. Avgör om följande utsagor är sanna eller falska. Bevisa de sanna utsagorna och motbevisa de falska, gärna med motexempel. I samtliga uppgifter är A en kvadratisk matris.

    (a) Om A är inverterbar så är raderna i A linjärt oberoende.

    (b) Om A är inverterbar så är kolonnerna i inversen A^{-1} linjärt oberoende.

    (c) Om kolonnerna i A^2 är linjärt oberoende så är även kolonnerna i A linjärt oberoende.

47. Låt $\{e_1, e_2, e_3\}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Går det att finna en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sådan att

$$e_1 = T(e_2) + T(e_3) \ , \ e_2 = T(e_3) + T(e_1) \ , \ e_3 = T(e_1) + T(e_2)$$

    Bestäm standardmatrisen för T i så fall! Är T injektiv?

48. Bestäm baser för nollrummet, kolonnrummet och radrummet för matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

49. Konstruera om möjligt matriser A_1, A_2, A_3 i följande fall. Motivera varför de konstruerade matriserna har de angivna egenskaperna eller förklara varför konstruktionen inte är möjlig.

    (a) $A_1x = b$ har mer än en lösning för något $b \in \mathbb{R}^4$ och av A_1:s kolonner är fyra linjärt oberoende.

    (b) $A_2x = b$ har precis en lösning för något $b \in \mathbb{R}^4$ och av A_2:s kolonner är tre linjärt oberoende.

    (c) $A_3x = b$ har mer än en lösning för något $b \in \mathbb{R}^4$ och av A_3:s kolonner är fem linjärt oberoende.

50. Betrakta det linjära rummet $\mathbb{S}$ av alla signaler (y_k), där k genomlöper alla heltal. Låt H vara alla $y = (y_k)$ i $\mathbb{S}$, som uppfyller differensekvationen

$$y_{k+2} + 0.30y_{k+1} + 0.02y_k = 0 \qquad (1)$$

    (a) Visa att H är ett underrum av $\mathbb{S}$

    (b) Inför beteckningarna

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 \\ -0.02 & -0.30 \end{bmatrix}$$

    Visa att ekvationen (1) är ekvivalent med

$$\mathbf{x}_{k+1} = M\mathbf{x}_k$$

(c) Finn egenvärdena och en bas av egenvektorer till M.

(d) Visa att $u = ((-0.2)^k)$ och $v = ((-0.1)^k)$ definierar två linjärt oberoende lösningar till (1)

(e) Visa att $\{u, v\}$ är en bas i H

(f) Visa att det för varje lösning y till (1) gäller att $y_k \to 0$ då $k \to \infty$.

51. Inspirerad av föregående uppgift, finn en formel för y_n där n är ett godtyckligt naturligt tal, om man vet att y löser differensekvationen

$$y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$$

och dessutom känner värdena av y_0 och y_1.

52. Låt u och v vara kolonnvektorer i $\mathbb{R}^n$, båda skilda från nollvektorn. Sätt

$$A = uv^T$$

Visa att rangen för A är 1. Bestäm också nollrum, kolonnrum och radrum för matrisen A.

53. I det linjära rummet $\mathbb{P}_N$ av alla polynom av graden N betraktar vi derivationsoperatorn D, dvs $Dp(t) = p'(t)$. Bestäm matrisen för D i standardbasen i $\mathbb{P}_N$.

54. Man kan visa att funktionerna $c_n(t) = \cos(nt), n = 0, 1, 2, \ldots, N$ är linjärt oberoende i det linjära rummet $C(\mathbb{R})$ av alla kontinuerliga funktioner på reella axeln. (Gör gärna ett försök att visa det!) Låt nu H_N vara det linjära rum som spänns upp av $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_N$. Betrakta den linjära avbildningen $T : H_N \to H_N$, definierad genom

$$T(f) = -f''$$

Bestäm matrisen för T i basen $\{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_N\}$. Vad är nollrummet av T.

55. Låt $M_{2\times 2}$ vara det linjära rummet av alla $2 \times 2-$matriser. Sätt

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

och

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

(a) Visa att $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ och $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ är baser i $M_{2\times 2}$.

(b) Låt H vara underrummet av alla symmetriska matriser. Visa att $\{F_1, F_2, F_3\}$ är en bas i H.

(c) Betrakta avbildningen $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definierad genom

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Bestäm matrisen för T i de båda baserna. Avgör om T är surjektiv, injektiv eller bådadera.

56. Betrakta det linjära rummet av all $3 \times 3-$matriser och sätt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Visa att $\{I, A, A^2\}$ är linjärt oberoende och att $A^3 \in \text{Span}\{I, A, A^2\}$. Bestäm också koordinaterna för A^3 i basen $\{I, A, A^2\}$!

57. Diagonalisera matrisen

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Bestäm sedan gränsvärdet av A^m då $m \to \infty$.
(Ledning: Matrisen har egenvärdena 1 och 0.5.)

58. Visa att matrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 8 & 8 & 4 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

inte är diagonaliserbar.

59. Bestäm egenvärden och motsvarande egenrum till matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}$$

för $a = 1$, $a = -1$, $a = -2$ och $a = -3$.

60. Betrakta det dynamiska systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, där $\mathbf{x}_0 = [a \;\; b]^T$ och

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Visa att gränsvärdet $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$ existerar och beräkna det.

61. Betrakta systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, där A definieras nedan. Förklara varför $\mathbf{x}_k \to 0$ då $k \to \infty$ oberoende av startvärdet $\mathbf{x}_0$.

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/(2\sqrt{2}) & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

62. Betrakta systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, där A definieras nedan. Förklara varför $\mathbf{x}_k$ alltid (alltså för varje startvärde $\mathbf{x}_0$) har ett gränsvärde då $k \to \infty$. Bestäm gränsvärdet då $\mathbf{x}_0 = [0 \; 0 \; 2]^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & -0.5 \\ 2.5 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar

46. Alla tre utsagorna är sanna!

47. Matrisen är
$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

48. Bas för kolonnrummet : de tre första kolonnerna i matrisen
Bas för radrummet : de tre första raderna i matrisen
Bas för nollrummet : $(-15,-14,4,8,0),(-19,-22,12,0,8)$

49. (c) är omöjlig

50. Matrisen M har egenvärdena -0.2 och -0.1.

51. $y_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

52. Kolonnrummet består av alla vektorer av formen tu , t skalär.
Radrummet består av alla tv
Nollrummet består av alla vektorer som är ortogonala mot v

53. Matrisen är
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

54. Matrisen är
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (N-1)^2 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N^2 \end{bmatrix}$$
Nollrummet är Span(c_0).

55. Matrisen i $E-$basen är
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Matrisen i $F-$basen är
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

56. $A^3 = I - 3A + 3A^2$. Koordinaterna för A^3 i basen $\{I, A, A^2\}$ är alltså $(1,-3,3)$.

57. $A = PDP^{-1}$ där (exempelvis)
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
Gränsvärdet av A^m är
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

58. Egenvärdena är 2 och 3. Undersök egenrummen!

59. $a=+1$: Egenvärden: $1\pm\sqrt{2}$. Egenrum: $\{c(1,1+\sqrt{2}) : c\in\mathbb{R}\}, \{c(1,1-\sqrt{2}) : c\in\mathbb{R}\}$
$a=-1$: Egenvärden: 1. Egenrum: $\{c(1,1) : c\in\mathbb{R}\}$ (Matrisen ej diagonaliserbar.)
$a=-2$: Egenvärden: $1\pm i$. Egenrum: $\{c(1,1+i) : c\in\mathbb{R}\}, \{c(1,1-i) : c\in\mathbb{R}\}$
$a=-3$: Egenvärden: $1\pm i\sqrt{2}$. Egenrum: $\{c(1,1+i\sqrt{2}) : c\in\mathbb{R}\}, \{c(1,1-i\sqrt{2}) : c\in\mathbb{R}\}$

60. $((a+b)/3, 2(a+b)/3)$

61. Matrisens egenvärden är $(1\pm i)/(2\sqrt{2})$ och 0.5. Eftersom absolutbeloppen är < 1 måste $\mathbf{x}_k \to 0$.

62. Egenvärdena är $0.5 \pm 0.5i$ (vars belopp är < 1) samt 1. Egenvektorn som hör till egenvärdet 1 är $(1,0,1)$.
Om $x_0 = (0,0,2)$ blir gränsvärdet $(2,0,2)$.