Linjär Algebra, del 2, HT98

Blandade övningar 63-99

J.L. 2 oktober 1998

63. Låt $\mathbb{P}_2$ vara det linjära rummet av alla polynom av grad högst 2.

    (a) Betrakta den linjära avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definierad genom att $q = T(p)$ där $q(t) = t^2p''(t) + tp'(t)$. Bestäm egenvärdena till T och beskriv motsvarande egenrum!

    (b) Samma uppgift om $q = T(p)$ definieras av $q(t) = p''(t) - 2tp'(t)$.

64. Lå $C([0,\pi])$ vara det linjära rummet av alla kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,\pi]$ och låt H vara det underrum som spänns upp av funktionerna $\sin(\omega t)$ och $\cos(\omega t)$. Betrakta avbildningen $T : H \to H$, som avbildar $\sin(\omega t)$ på $3\cos(\omega t)$ och $\cos(\omega t)$ på $\sin(\omega t) + 2\cos(\omega t)$. Bestäm egenvärden och egenvektorer för T.

65. Låt H vara det linjära rummet av alla lösningar till differensekvationen

$$y_{k+2} + y_{k+1} + y_k = 0, k = 0, 1, 2, \ldots$$

    Finn en bas för H. Bestäm sedan matrisen för den linjära avbildningen $T : H \to H$ definierad av att T avbildar följden (y_k) på följden (y_{k+1}). Ange också egenvärden och egenvektorer till T.

66. Betrakta det linjära rummet av alla polynom i en variabel t. Bestäm en bas för det underrum som spänns upp av polynomen

$$t + t^3, -t^2 + t^3, 1 + t^2, 1 + t^3, 1 + t + 2t^3$$

67. Låt v_1, v_2, v_3 vara linjärt oberoende vektorer i ett linjärt rum. För vilka tal a och b är vektorerna

$$av_1 + v_3,\ bv_2 + v_3,\ bv_1 - av_2 + v_3$$

    linjärt oberoende?

68. Finn en ortogonal bas för det underrum av $\mathbb{R}^4$, som spänns upp av

$$(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)$$

69. Sätt

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    Visa att avbildningen $\mathbf{x} \mapsto P\mathbf{x}$ är en ortogonal projektion på ett plan och bestäm detta plan.

70. (a) Finn en bas för det ortogonala komplementet till det underrum av $\mathbb{R}^5$, som spänns upp av *raderna* i matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet till nollrummet för A.

71. (a) Bestäm det kortaste avståndet från punkten $(1, 1, 1, 1)$ till mängden $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

(b) Samma uppgift för punkten $(1, 2, 3, 4)$

72. Låt $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definieras genom att $T(x)$ är den ortogonala projektionen av x på underrummet $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Finn matrisen för T. Bestäm också (utan att räkna) egenvärden och en ortogonal bas av egenvektorer.

73. Låt W vara ett underrum av $\mathbb{R}^n$. Den linjära avbildningen $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definieras genom att $S(x) = 2\hat{x} - x$, där $\hat{x}$ är den ortogonala projektionen av x på W.

(a) Beskriv S geometriskt om W är ett plan genom origo.

(b) Finn (för ett allmänt W) egenvärden och motsvarande egenrum till S.

(c) Finn standardmatrisen för S om W är lösningsmängden i $\mathbb{R}^4$ till systemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

(d) Diagonalisera S i uppgiften (c) ovan.

74. Sätt $u = (-2, 0, 1, 0)$ och $v = (1, 0, 0, 1)$ och låt W vara det linjära höljet av $\{u, v\}$. Vi söker den ortogonala projektionen $\hat{x}$ av $x = (1, 2, 3, 4)$ på W. Finn alla fel i följande kalkyl:

$$u \cdot x = 1, \; v \cdot x = 5$$

$$u \cdot u = 5, \; v \cdot v = 2$$

$$\hat{x} = \frac{1}{5}u + \frac{5}{2}v = \frac{1}{10}(2u + 25v) = \frac{1}{10}(21, 0, 2, 25)$$

Korrigera felen!

75. Konstruera en kvadatisk matris A med följande fyra egenskaper

$(\mathrm{Col}(A))^{\perp} = \mathrm{Nul}(A)$
A har egenvärdet 1 med egenvektorn $(0, 1, 1)$
det finns en egenvektor i $\mathrm{Nul}(A)$
summan av diagonalelementen i A är 0

76. Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} 18x_1' = & -5x_1 & +4x_2 & -2x_3, & x_1(0) = 1 \\ 18x_2' = & +4x_1 & -5x_2 & -2x_3, & x_2(0) = 2 \\ 18x_3' = & -2x_1 & -2x_2 & -8x_3, & x_3(0) = 3 \end{cases}$$

Ledning: Matrisen i höger led har egenvärdena -9 (dubbelt) och 0.

77. För vilka parametervärden p är den kvadratiska formen $x_1^2 + x_2^2 + px_1x_2$ positivt definit?

78. Finn det största och minsta värdet av $x_1^2 + x_2^2 + px_1x_2$ på cirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 4$ för olika parametervärden!

79. Finn det största och minsta värdet av

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2$$

på enhetssfären $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. I vilka punkter antas dessa värden?

80. Antag att $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ och betrakta ellipsen $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$. Vilka punkter på denna ellips ligger längst från origo? Vilka punkter ligger närmast origo?

81. Vilka punkter på kurvan $x_1^2 + x_2^2 + 0.6x_1x_2 = 1$ ligger närmast origo och vilka ligger längst ifrån origo?

82. Låt A vara en reell $m \times n-$matris med linjärt oberoende kolonner och låt W vara kolonnrummet till A. Visa att $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ är standardmatrisen för den ortogonala projektionen av $\mathbb{R}^m$ på W.

83. Sätt

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ i \end{bmatrix}$$

Beräkna den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ längs $\mathbf{u}$ samt produkten $\mathbf{vu}^*$.

84. Konstruera en matris vars egenvärden är

$$\frac{(1 \pm i)}{\sqrt{2}}$$

med egenvektorer $(1 \pm i, 1)$.

85. (a) Låt A vara en reell, symmetrisk $5 \times 5-$ matris med tre olika egenvärden. Visa att det finns två olika egenrum med samma dimension.

    (b) Antag att A är en ortogonalt diagonaliserbar och inverterbar $n \times n-$matris. Visa att även A^{-1} är ortogonalt diagonaliserbar.

86. Bestäm den ortogonala projektionen i $\mathbb{C}^4$ av $\mathbf{z} = (1, 2, 3, 4)$ på det underrum som spänns upp av $\mathbf{u} = (1, i, -1, -i)$ och $\mathbf{v} = (i, -1, -i, 1)$.

87. Finn en unitär diagonalisering av matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

88. Betrakta rummet $\mathbb{C}^3$. Låt W vara det underrum som spänns upp av vektorn $(1, i, 1+i)$. Bestäm standardmatrisen för den ortogonala projektionen på W.

89. (a) Betrakta den inhomogena differensekvationen

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-} + \ldots + a_k y_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

    där (b_n) är en given följd. Antag att (p_n) vara en speciell lösning. Visa att lösningsmängden till den inhomogena differensekvationen består av alla följder $(z_n + p_n)$, där (z_n) löser motsvarande homogena differensekvation.

    (b) Lös differensekvationen $y_{n+1} - y_n = b_n$ där $b_n = 0$ om $n \neq r$, $b_r = 1$.

90. Finn den räta linje $y = ax + b$ som i minsta kvadratmetodens mening bäst anpassar sig till punkterna

$$(0, 1),\ (1, 3),\ (2, 2),\ (3, 1)$$

91. Finn minsta kvadrat-lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 &= 3 \end{cases}$$

92. Antag att A och B är två reella matriser som är ortogonalt diagonaliserbara med hjälp av samma ortogonala matris. Visa att detta också gäller AB. Visa även att A och B kommuterar.

93. Följande matris har egenvärdena $-1, 1, 2$. Finn en ortogonal diagonalisering!

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

94. Cauchys olikhet i $\mathbb{R}^n$ säger som bekant att

$$-\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \leq \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$$

När gäller likhet i de båda olikheterna.
Visa att

$$-\sqrt{n} \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \sqrt{n}$$

om $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.

95. Låt H och K vara två underrum i ett godtyckligt linjärt rum. Visa att snittet $H \cap K$ är ett underrum. Ge också exempel på H och K där unionen $H \cup K$ är ett underrum och ett annat exempel där unionen inte är ett underrum.

96. Betrakta det linjära rummet av alla signaler (y_k), k heltal. Låt H vara underrummet av alla signaler y sådana att

$$y_{k+3} - 2y_{k+2} - y_{k+1} + 2y_k = 0$$

Bestäm en bas för H.

97. En reellvärd kvadratisk matris kallas skevsymmetrisk om $A^T = -A$. Visa att alla egenvärden ligger på imaginära axeln.

98. Låt A vara en reell $n\times n-$matris med rangen r och antag att P är en inverterbar $n \times n-$matris. Sätt $B = PAP^{-1}$ och visa att B har rangen r.

99. Låt U vara en unitär $n\times n-$matris. Visa att varje egenvärde till U har absolutbeloppet 1 och att två egenvektorer som hör till olika egenvärden är ortogonala.

Svar

63. Tips: Studera matrisen för T i standardbasen för att hitta egenvärden och egenvektorer.

    (a) $\lambda_1 = 0, \{p : p(t) = c, c \in \mathbb{R}\}$
    $\lambda_2 = 1, \{p : p(t) = ct, c \in \mathbb{R}\}$
    $\lambda_3 = 4, \{p : p(t) = ct^2, c \in \mathbb{R}\}$

    (b) $\lambda_1 = 0, \{p : p(t) = c, c \in \mathbb{R}\}$
    $\lambda_2 = -2, \{p : p(t) = ct, c \in \mathbb{R}\}$
    $\lambda_3 = -4, \{p : p(t) = c(1-2t^2), c \in \mathbb{R}\}$

64. Egenvärden -1 ch 3.
    Egenrum $\{c(3\sin(\omega t) + \cos(\omega t)) : c \in \mathbb{R}\}$, resp $\{c(\sin(\omega t) + \cos(\omega t)) : c \in \mathbb{R}\}$

65. Egenvärden $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Egenvektorer $((\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2})^k)$.

66. Exempelvis de tre första polynomen

67. $a^2 - b^2 + ab \neq 0$

68. $(1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,-1,-1,1)$

69. Planet är $x_1 - x_3 = 0$

70. (a) $(0,-1,0,1,0), (-1,0,0,0,1)$, (b) $(1,0,0,0,1), (0,1,0,1,0), (0,0,1,0,0)$

71. (a) 2, (b) 5

72. Egenvärden $0,1,1,1$. Egenvektorer $(1,1,1,1), (1,-1,0,0), (0,0,1,-1), (1,1,-1,-1)$
    Matris
$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

73. (a) S är spegling i planet
    (b) Egenvärden -1, med egenrum $W^\perp$, och $+1$, med egenrum W
    (c)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (d)\ A = PDP^{-1}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

74. Beräkna $u \cdot v$. (De är inte ortogonala). Rätt svar $\hat{x} = (1/2, 0, 2, 9/2)$.

75. Många möjligheter,t.ex $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

76. $3x_1(t) = e^{-0.5t} + 2, \;\; 3x_2(t) = 4e^{-0.5t} + 2, \;\; 3x_3(t) = 10e^{-0.5t} - 1$

77. $p^2 < 4$

78. $4 \pm 2p$

79. Största värdet är 3, antas i $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$
    Minsta värdet är -1, antas i $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$

80. Längst ifrån origo ligger $(0, \pm 1/\sqrt{\lambda_2})$
    Närmast origo ligger $(\pm 1/\sqrt{\lambda_1}, 0)$

81. Längst bort från origo ligger $\pm 1/\sqrt{1.4}(1,-1)$ Närmast origo ligger $\pm 1/\sqrt{2.6}(1,1)$

82. Visa att $P\mathbf{x} \in W$ och att $\mathbf{x} - P\mathbf{x} \in W^\perp$ för varje $\mathbf{x}$.

83. Projektionen är $0.25(2-i, 1+2i, 3+i)$,

84. Ett sätt är att ta lämpliga P och D och sen beräkna $A = PDP^{-1}$. Förslag

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

85. (a) OBS Om summan av tre positiva heltal är 5 så är två av dem lika.
(b) Jobba med $A = UDU^T$

86. $0.5(-1+i, -1-i, 1-i, 1+i)$

87.

$$P = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & -1+i & -1 \\ -1-i & 0 & -1-i \\ 1 & 1-i & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

88.

$$0.25 \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & 1-i & 2 \end{bmatrix}$$

89. Jämför med sats 6 i Lays kapitel 1.
I (b) är $y_n = c + p_n$ där $p_n = 0$ om $n \leq r$ och $p_n = 1$ om $n > r$.

90. $y = 1.9 - 0.1x$

91. $x_1 = 2, x_2 = -1/14$

92. Skriv $A = UD_1U^T, B = UD_2U^T$ där D_1, D_2 är diagonalmatriser. Observera att D_1 och D_2 kommuterar.

93.

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

94. Likhet gäller när $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är parallella. För att visa likheten sätt $\mathbf{y} = (1, 1, \ldots, 1)$.

95. $H = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}, K = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ Unionen är inte ett underrum av $\mathbb{R}^2$.

96. Signalerna u,v och w bildar en bas om $u_k = 2^k$,$v_k = 1$ och $w_k = (-1)^k$

97. Beräkna $\|A\mathbf{v}\|^2$ på två sätt om $\mathbf{v}$ är en egenvektor. Observera att även origo ligger på imaginära axeln.

98. Kan rangsatsen vara något?

99. Starta med $Uv = \lambda v, Uu = \lambda u$ och beräkna $\|Uv\|$ och $Uv \cdot Uu$