Linjär Algebra, del 2, HT98

Datorlaboration 6

Denna laboration handlar om system av differentialekvationer $x' = Ax$, med begynnelsevillkor $x(0) = c$. Här är A en $n \times n-$matris. MATLAB producerar lösningen med hjälp av kommandot `expm`. Om A är diagonaliserbar med $A = PDP^{-1}$, så är $\text{expm}(A) = P\exp(D)P^{-1}$, där $\exp(D)$ fås genom att applicera exponentialfunktionen på diagonalelementen.

1. Använd MATLAB för att finna lösningen till följande begynnelsevärdesproblem:

$$\left\{ \begin{array}{rcrrl} x_1' & = & -2x_1 & +x_2, & x_1(0) = 1 \\ x_2' & = & -8x_1 & +px_2, & x_2(0) = 1 \end{array} \right.$$

där $p \in \{1.9, 2.0, 2.1\}$. Rita kurvan $(x_1(t), x_2(t))$ på intervallet $0 \leq t \leq 100$ för dessa $p-$värden.

2. Rörelsen hos ett block, som är fäst vid en fjäder, kan (i en enkel modell) beskrivas med hjälp av differentialekvationen

$$y'' + by' + ay = 0$$

där a står för fjäderns kraft och b för friktionen. Skriv om denna ekvation som ett system genom att sätta $x_1 = y, x_2 = y'$. Studera därefter fjäderns rörelse om $y(0) = 1, y'(0) = 0$ i följande fall:

$$\begin{array}{ll} a = 1.00, & b = 0.20 \\ a = 1.00, & b = 0.00 \\ a = 0.01, & b = 0.20 \end{array}$$

Beräkna lösningen med hjälp av MATLAB. Rita lösningskurvan $y = y(t)$ på något lagom långt intervall $0 \leq t \leq T$. Vad ser ut att hända då $t \to \infty$ i de tre fallen?

3. Tre lika stora vattentankar innehåller 1000 liter vatten vardera. Saltmängden i i tankarna förändras hela tiden så att en viss procentandel a_{jk} av saltmängden i tank k strömmar till tank j varje sekund. Ett hundra kilo salt finns löst i en av tankarna. Låt nu $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ vara mängden salt i de tre tankarna vid tiden t. Då gäller följande samband:

$$\left\{ \begin{array}{rcrrr} x_1' & = & -(a_{21} + a_{31})x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 \\ x_2' & = & a_{21}x_1 & -(a_{12} + a_{32})x_2 & +a_{23}x_3 \\ x_3' & = & a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & -(a_{13} + a_{23})x_3 \end{array} \right.$$

Hur fördelar sig saltet på lång sikt?
Siffervärden:
$a_{12} = 0.2\%, \quad a_{13} = 0.6\%$
$a_{21} = 1.0\%, \quad a_{23} = 0.1\%$
$a_{31} = 0.3\%, \quad a_{32} = 0.8\%$

VÄND!

Redovisa laboration .
Redovisningen skall innehålla namn, grupparbetsgrupp samt

- en figur som beskriver den begärda kurvan i uppgift 1 med p=2.0, samt en kort beskrivning av hur fallen $p = 1.9$ och $p = 2.1$ skiljer sig från fallet $p = 2.0$.
- en beskrivning av skillnaden då $t \to \infty$ i de tre fallen i uppgift 2
- den långsiktiga fördelningen i uppgift 3

Den som inte vill hitta på ett eget program för att lösa system av differentialekvationer kan kanske ha hjälp av följande råa program:

```
function [t,x]=solveode(matris,start,stopptid,tidssteg)
if nargin<4 tidssteg=1; end;
x(:,1)=start;
for t=tidssteg:tidssteg:stopptid
x=[x,expm(t*matris)*start];
end;
t=0:tidssteg:stopptid;
```

Filen sparas under namnet solveode.m

Man använder detta program så här:

Mata först in systemets koefficienter i en matris, kallad t.ex. A
Mata sedan in startvärdena i en kolonnvektor, säg `c`.
Ge sedan (exempelvis) kommandot

```
>>  [t,x]=solveode(A,c,10,0.1)
```

Detta ger lösningen x till systemet $x' = Ax, x(0) = c$
med $t = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ \ldots\ldots\ ,9.9,\ 10$

Man kan sedan rita upp lösningarna med kommandon i stil med
```
>>  plot(x(1,:),x(2,:))
```
(som ritar kurvan $t \to (x_1(t), x_2(t))$)
eller
```
>>  plot(t,x(1,:),t,x(2,:))
```
(som ritar kurvorna $t \to x_1(t)$ och $t \to x_2(t)$)