Ekvationssystem med komplexa tal

När vi i början av kursen införde matriser var deras element alltid reella tal. Senare, i samband med egenvärden, blev det nödvändigt att arbeta med matriser med komplexa tal som element. I efterhand kan man alltså säga att det hade varit bättre att från början arbeta med matriser med komplexa tal. Skälet att vi inte gjorde så är att det är räknemässigt krångligare att räkna med komplexa tal och dessutom onödigt för många tillämpningar.

Vårt första skäl att införa matriser var önskan att lösa linjära ekvationssystem. Både de obekanta och koefficienterna i ett sådant system kan få vara komplexa tal. Radreduceringsalgoritmen fungerar precis likadant. Låt oss titta på ett exempel.

Exempel 1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} z_1 \phantom{{}+z_2} + iz_3 = -1 \\ iz_1 + z_2 + z_3 = 3+i \end{cases}$$

Vi sätt då upp totalmatrisen för systemet och utför radreduceringar så som vi vant oss vid. Här blir beräkningarna uthärdliga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & i & -1 \\ i & 1 & 1 & 3+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3+2i \end{bmatrix}$$

Lösningarna är således

$$\begin{cases} z_1 = -1 - iz_3 \\ z_2 = 3 + 2i - 2z_3 \\ z_3 \quad \text{fri komplex variabel} \end{cases}$$

Rummet $\mathbb{C}^n$

I analogi med rummet $\mathbb{R}^n$ inför vi nu rummet $\mathbb{C}^n$ av alla n-tiplar av komplexa tal $z_1, \ldots, z_n$. Vi skriver dem som kolonnvektorer, alltså

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Addition definieras koordinatvis precis som i $\mathbb{R}^n$. Multiplikation definieras också analogt, men med skalär avses komplexa tal. Lösningsmängden i föregående exempel kan till exempel skrivas

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3+2i \\ 0 \end{bmatrix} + z_3 \begin{bmatrix} -i \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vidare inför man matrismultiplikation. Om

$$A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]$$

är en $m \times n$-matris med komplexa element, d.v.s. med kolonner $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ i $\mathbb{C}^m$. Så definierar vi $A\mathbf{z}$ som den viktade summan

$$A\mathbf{z} = z_1\mathbf{a}_1 + \dots + z_n\mathbf{a}_n.$$

Därefter definierar vi matrismultiplikation precis som tidigare. Om $B = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_p]$ är en $n \times p$-matris sätter vi alltså

$$AB = [A\mathbf{b}_1 \dots A\mathbf{b}_p].$$

Vi kan därefter definiera invers matris precis som tidigare. Den kvadratiska matrisen A är således inverterbar med inversen C om $AC = I$ och $CA = I$. Satser om inversen blir oförändrade liksom standardalgoritmen för att bestämma inversen.

Exempel 2. Låt oss beräkna inversen av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}.$$

Vi väljer att se A som en block-matris och börjar med att beräkna inversen av blocket i nedre högra hörnet. Eftersom

$$\begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{vmatrix} = i - (-i) = 2i$$

är

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Därför är

$$A^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & i \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Linjära rum över de komplexa talen

En mängd V kallas ett linjärt rum om det finns en addition och en multiplikation med skalärer, så att en lista av egenskaper gäller. Ordet skalär har hittills stått för reellt tal, men precis samma definition kan användas om skalärerna är komplexa tal. Man talar då om linjära rum över de komplexa talen. Det viktigaste exemplet på ett sådant rum är $\mathbb{C}^n$.

Definitioner av linjärt oberoende, bas, dimension, kolonnrum, nollrum m.m. blir desamma som tidigare, bara med den skillnaden att alla skalärer är komplexa tal.

Exempel 3. Vi söker baser för nollrummet och kolonnrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ i & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kalkylen visar att en bas för nollrummet är (utskrivet som radvektor) $\mathbf{v} = (-i, -2, 1)$. En bas för kolonnrummet är $\{(1, i), (0, 1)\}$. (Radrummet har som synes basen $\{(1, 0, i), (0, 1, 2)\}$).

Skalärprodukt (inre produkt) i $\mathbb{C}^n$

Det finns en avgörande teoretisk skillnad mellan $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$, nämligen definitionen av skalärprodukt. I $\mathbb{R}^n$ definieras ju skalärprodukten mellan $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ och $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ genom $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \ldots x_n y_n$. Om man sätter $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ får man $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, som alltid är icke-negativt. Om man emellertid har låter $x_1, \ldots, x_n$, vara komplexa tal blir $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ inte alltid icke-negativt. Tag t.ex. $n = 2$ och betrakta fallet $x_1 = i, x_2 = 0$. Då är $x_1^2 + x_2^2 = i^2 = -1$. Att skalärprodukten av en vektor med sig själv är icke-negativ är avgörande för teorin. Därför måste skalärprodukten definieras på ett annat sätt än i $\mathbb{R}^n$.

Definition 1. Låt $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ och $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ vara godtyckliga vektorer i $\mathbb{C}^n$. Skalärprodukten $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}$ mellan $\mathbf{z}$ och $\mathbf{w}$ definieras då med hjälp av formeln

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \bar{z}_1 w_1 + \ldots + \bar{z}_n w_n$$

Exempel 4. Sätt $\mathbf{z} = (1, 0, i), \mathbf{w} = (i, 1, 1)$. Då är

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} &= 1 \cdot i + 0 \cdot 1 + (-i) \cdot 1 = 0 \\ \mathbf{z} \cdot \mathbf{z} &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot +(-i) \cdot i = 2 \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} &= (-i) \cdot i + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Sats 1 (Egenskaper hos skalärprodukten). Om $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ och $z \in \mathbb{C}$ så gäller

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} \tag{1}$$
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \tag{2}$$
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \tag{3}$$
$$(z\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \bar{z}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \tag{4}$$
$$\mathbf{u} \cdot (z\mathbf{v}) = z(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \tag{5}$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0 \tag{6}$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{om och endast om } \mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Observera särskilt (1) och (4) som avviker från räknereglerna för skalärprodukt på $\mathbb{R}^n$.

Bevis Vi bevisar (1), (4), (6), (7).
Antag att $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Då är

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \bar{v}_1 u_1 + \ldots \bar{v}_n u_n.$$

Enligt räkneregler för konjugering av komplexa tal är $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$, $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ och $\overline{(\bar{a})} = a$. Därför är

$$\overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} = \overline{\bar{v}_1 u_1} + \ldots + \overline{\bar{v}_n u_n} = v_1 \bar{u}_1 + \ldots + v_n \bar{u}_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Detta visar (1). Vi ser också att

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \bar{u}_1 u_1 + \ldots + \bar{u}_n u_n = |u_1|^2 \ldots + |u_n|^2$$

vilket ger både (6) och (7). Egenskapen (5) är också enkel ty

$$(z\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (\overline{zu_1})v_1 + \ldots + (\overline{zu_n})v_n = \bar{z}\bar{u}_1 v_1 + \ldots + \bar{z}\bar{u}_n v_n.$$

Därför är

$$(z\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \bar{z}(\bar{u}_1 v_1 + \ldots + \bar{u}_n v_n) = \bar{z}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).$$

Definition 2. *Längden* $\|\mathbf{u}\|$ av en vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ definieras genom

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{|u_1|^2 + \ldots + |u_n|^2}.$$

Två vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ är *ortogonala* om

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Mycket av resultaten för skalärprodukter i $\mathbb{R}^n$ kan nu upprepas i $\mathbb{C}^n$. Vi har exempelvis

Pythagoras sats:	om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala så är $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$
Cauchys olikhet:	$\lvert\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\rvert \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$
Triangelolikheten:	$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Men måste iaktta en viss försiktighet när man överför resultat från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{C}^n$, eftersom skalärprodukten i $\mathbb{C}^n$ *inte är kommutativ.* Den ortogonala projektionen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{v}$ längs $\mathbf{u}$ måste exempelvis definieras genom

$$\mathbf{p} = \frac{\overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}.$$

Denna vektor har nämligen egenskapen att $\mathbf{v} - \mathbf{p}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$, ty

$$(\mathbf{v} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - (\frac{\overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Den ortogonala projektionen kan däremot inte definieras som vektor $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}$, ty då är $\mathbf{v} - \mathbf{q}$ inte alltid ortogonal mot $\mathbf{u}$. (Läsaren kan lätt kontrollera detta!)

Hermiteska matriser

Om $A = [a_{rk}]$ är en godtycklig $m \times n$-matris, (med reella eller komplexa element) definierar vi *den transponerade matrisen* A^T genom att sätta $A^T = [a_{kr}]$. Detta är således en $n \times m$-matris. En kvadratisk matris A sägs vara *symmetrisk* om $A^T = A$ d.v.s. om $a_{rk} = a_{kr}$, för alla r, k. För reella matriser (matriser med reella element) gäller att varje symmetrisk matris har reella egenvärden och är diagonaliserbar. Detta är ett specialfall av ett mera allmänt resultat om s.k. Hermiteska matriser (efter den franske matematikern Hermite).

Definition 3. Låt $A = [a_{rk}]$ vara en $m \times n$-matris med komplexa element. Vi definierar då *konjugat-transponaten* A^* av A genom

$$A^* = [\bar{a}_{kr}].$$

En kvadratisk matris A sägs vara *Hermitesk* om $A^* = A$.

Exempel 5. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} i & 1+i & 1 \\ 2i & 1+2i & 2 \end{bmatrix}.$$

Då är

$$A^* = \begin{bmatrix} -i & -2i \\ 1-i & 1-2i \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exempel 6. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$$

är Hermitesk, ty $A^* = A$.

Sats 2 (Räkneregler för konjugat-transponering). Låt A och B vara godtyckliga matriser sådana att AB är definierat. Då gäller

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

Om A är inverterbar gäller

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

OBS 1. Om A är en reell matris är uppenbarligen $A^* = A^T$. Varje reell symmetrisk matris är därför Hermitesk.

OBS 2. Diagonalelementen i en Hermitesk matris måste vara reella ty om $A = [a_{rk}]$ så har A diagonalelementen a_{rr}. Villkoret $A^* = A$ ger då $\bar{a}_{rr} = a_{rr}$ d.v.s. att a_{rr} är reella tal.

OBS 3. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är kolonnvektorer så är

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^* \mathbf{v}$$

Unitära matriser

Definition 4. En kvadratisk matris U är *unitär* om

$$U^* U = I.$$

Exempel 7. Sätt

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Då är U unitär, ty

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

och

$$U^* U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

En reell kvadratisk matris U är unitär då och endast då $U^T U = I$ (ty då är $U^* = U^T$). Det innebär att en reell matris är unitär då och endast då den är ortogonal och kolonnerna har längden 1. Detta gäller även för komplexa matriser, ty om U har kolonnerna $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ så är elementen i $U^* U$ lika med $\mathbf{u}_r^* \mathbf{u}_k$. Alltså är $U^* U = I$ precis när

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r^* \mathbf{u}_k &= \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_k = 0 \quad \text{om } r \neq k \\ \mathbf{u}_r^* \mathbf{u}_r &= \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r = 1 \end{aligned}$$

Således är U unitär då och endast då kolonnerna är ortogonala och har längden 1. De är med andra ord *ortonormala*.

OBS 4. En unitär matris U är inverterbar. Det framgår av den definierande formeln $U^* U = I$. Tydligen är

$$U^{-1} = U^*.$$

Diagonalisering av Hermiteska matriser

Reella symmetriska matriser har reella egenvärden och kan diagonaliseras med hjälp av en ortogonal matris. Detta är i själva verket ett specialfall av följande mer allmänna sats för Hermiteska matriser.

Sats 3 (Spektralsatsen för Hermiteska matriser). Låt A vara en Hermitesk $n \times n$-matris. Då gäller

(a) A har n reella egenvärden (inräknat multiplicitet)

(b) dimensionen av egenrummet hörande till ett viss egenvärde är detta egenvärdes multiplicitet

(c) egenrum som hör till olika egenvärden är ortogonala

(d) det finns en unitär matris U och en diagonalmatris D, sådan att

$$A = UDU^*$$

(e) om A är reell och symmetrisk så kan U ovan väljas reell, ortogonal.

Ett bevis (för den intresserade) ges efter följande exempel.

Exempel 8. Diagonalisera den Hermiteska matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi börjar i vanlig ordning med att söka egenvärdena till A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1+i \\ 1-i & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (1+i)(1-i) = \lambda^2 - 3\lambda.$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$.

Vi söker nu motsvarande egenvektorer.

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -(1+i) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -2 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}$$

Nu är (automatiskt) $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ ortogonala, men de har inte längden 1. Därför normaliserar vi $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ och sätter

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -(1+i) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}.$$

Som unitär matris U i spektralsatsen väljer vi

$$U = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2] = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -(1+i) & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$$

och har då att $A = UDU^*$ där

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Bevis av spektralsatsen

Vi börjar med att bevisa (a). Den karakteristiska ekvationen för matrisen A är en n:tegradsekvation och har därför n rötter enligt algebrans fundamentalsats. Dessa rötter är just egenvärdena till A. Vi skall visa att egenvärdena är reella om A är Hermitesk.
Antag då att λ är ett egenvärde och $\mathbf{v}$ en motsvarande egenvektor. Då är

$$\lambda\|\mathbf{v}\|^2 = \lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\lambda\mathbf{v}) = \mathbf{v}^*A\mathbf{v}$$

Om nu A är Hermitesk har vi att $\mathbf{v}^*A\mathbf{v} = \mathbf{v}^*A^*\mathbf{v} = (A\mathbf{v})^*\mathbf{v}$ enligt sats 2. Därför är

$$\lambda\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^*A\mathbf{v} = (A\mathbf{v})^*\mathbf{v} = (\lambda\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = \bar{\lambda}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \bar{\lambda}\|\mathbf{v}\|^2$$

Det följer att $\lambda = \bar{\lambda}$, dvs λ är reellt.

Beviset av (b)-(e) genomföres med induktion över n. Låt M vara mängden av alla naturliga tal m, sådana att satsen är sann för alla $n \leq m$. Eftersom satsen självklart är sann för $n = 1$, så har vi att $1 \in M$. Antag alltså att $m \in M$. Vi vill visa att $m + 1 \in M$. Om vi visar detta för varje m så följer att $M = \mathbb{N}$, dvs att satsen gäller för alla n.

Att $m \in M$ innebär att satsen är sann för alla $n \leq m$. Det räcker därför att visa att satsen i så fall måste gälla för $n = m + 1$. Låt alltså A vara en $(m + 1) \times (m + 1)-$matris. Låt λ vara ett egenvärde till A och låt E vara motsvarande egenrum. Dess dimension är d. Vi kan då konstruera en ortonormal bas $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_d\}$ i E (genom att använda Gram-Schmidts metod). Låt F vara det ortogonala komplementet av E och låt $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k\}$ vara en ortonormal bas i F. I så fall är $d + k = n = m + 1$ så att $k \leq m$.

Vi påstår nu att matrisavbildningen $T : \mathbf{z} \to A\mathbf{z}$ avbildar E på E och F på F. Det första är klart ty $A\mathbf{p}_j = \lambda\mathbf{p}_j$. För att visa att T avbildar F på sig själv påminner vi om att

$$F = \{\mathbf{z} : \mathbf{p}_j^*\mathbf{z} = 0, j = 1, \ldots, d\}$$

Om $\mathbf{z} \in F$ så följer att $A\mathbf{z} \in F$, ty

$$\mathbf{p}_j^* A\mathbf{z} = \mathbf{p}_j^* A^*\mathbf{z} = (A\mathbf{p}_j)^*\mathbf{z} = (\lambda\mathbf{p}_j)^*\mathbf{z} = \lambda\mathbf{p}_j^*\mathbf{z} = 0$$

Sätt nu $U = [\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_d\ \mathbf{q}_1 \ldots \mathbf{q}_k]$. Detta är en unitär matris och

$$AU = [\lambda\mathbf{p}_1 \ldots \lambda\mathbf{p}_d\ A\mathbf{q}_1 \ldots A\mathbf{q}_k]$$

Detta innebär att

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda I & O \\ O & B \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad B = [\mathbf{q}_i^* A\mathbf{q}_j]$$

Då är B en Hermitesk $k \times k-$matris ty

$$B^* = [\overline{\mathbf{q}_j^* A\mathbf{q}_i}] = [\overline{(A\mathbf{q}_j)^*\mathbf{q}_i}] = [\mathbf{q}_i^* A\mathbf{q}_j] = B$$

Enligt induktionsantagandet gäller nu satsen för B. Alltså finns en unitär $k \times k-$matris W, så att $W^*BW = D$, en diagonalmatris. Sätter vi

$$V = \begin{bmatrix} I & O \\ O & W \end{bmatrix}$$

så är V en unitär matris och

$$(UV)^*A(UV) = V^*U^*AUV = \begin{bmatrix} \lambda I & O \\ O & W^*BW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I & O \\ O & D \end{bmatrix}$$

Eftersom UV är unitär (enligt sats 2) har vi funnit en unitär diagonalisering av A.
(Vi lämnar en del detaljer till läsaren.)

MATLAB-kommandon

Konjugat-transponering betecknas i MATLAB med `'`, alltså `>> A'`

För reella matriser att detta detsamma som transponering (d.v.s. omkastning av rader och kolonner).

Vill man kasta om rader och kolonner i en komplex matris utan att konjugera samtidigt, skriver man `>> A.'`

Kommandon för inverser, determinanter, matrismultiplikation, egenvärdesberäkning är desamma för komplexa matriser som för reella.

Övningar

1. Finn alla (komplex) lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} z_1 + (1-i)z_2 + iz_3 = 3+i \\ (1+i)z_1 + \quad 2z_2 \quad = 2-i \end{cases}$$

2. Finn baser för kolonnrum, radrum och nollrum till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-i & i \\ 1+i & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Finn inversen till matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

4. Beräkna skalärprodukterna $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ och $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ samt längderna $\|\mathbf{u}\|$ och $\|\mathbf{v}\|$ om $\mathbf{u} = (1, i, 1+i)$, $\mathbf{v} = (1-i, 2, 2+i)$.

5. Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ längs $\mathbf{u}$ om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är de vektorer som definieras i föregående uppgift.

6. Avgör vilka av följande matriser som är symmetriska resp. Hermiteska

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1+i & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$

7. Avgör vilka v följande matriser som är unitära

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}$

8. Finn alla 2×2-matriser, som är både unitära och Hermiteska!

9. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

10. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1-i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1+i & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 1+i \\ 0 & 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

12. Låt A vara en godtycklig $m \times n$-matris. Motivera varför matriser A^*A kan diagonaliseras med en unitär matris.

13. Visa att en unitär matris U definierar en *isometri* på $\mathbb{C}^n$ d.v.s. att avbildningen $T(\mathbf{z}) = U\mathbf{z}$, har egenskapen att

$$\|T(\mathbf{z}) - T(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|$$

för alla $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$.

Svar

1. $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-3i \\ 0 \\ 5-5i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{C}$
2. Bas för nollrummet $(-1+i, 1, 0)$.
   Bas för radrummet $\{(1, 1-i, 0), (0, 0, 1)\}$
   Bas för kolonnrummet $\{(1, 1+i), (i, 0)\}$
3. Inversen är $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1+i \\ -1-i & 2 \end{bmatrix}$
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 4(1+i)$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4(1-i)$, $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{11}$
5. $(1-i, 1+i, 2)$
6. (b), (c) är symmetriska (d.v.s. $A^T = A$)
   (d) är Hermitesk
7. (a), (c) är unitära, inte (b)
   (c) är dessutom Hermitesk.
8. Fyra matriser av formen $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$, samt alla av formen $\begin{bmatrix} a & c \\ \bar{c} & -a \end{bmatrix}$ där $-1 < a < 1$, $|c|^2 = 1 - a^2$.
9. $U = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ -1-i & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
10. $U = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1-i & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
    (det finns oändligt många svar eftersom ett egenvärde är dubbelt).
11. $U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1-i & -i \\ -1+i & 0 & -1-i \\ -i & 1-i & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
12. A^*A är Hermitesk.
13. Sätt $\mathbf{v} = \mathbf{z} - \mathbf{w}$ och visa att $(U\mathbf{v}) \cdot (U\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

Hermiteska matriser

J. L. version 20 november 1998

Matematiska institutionen