MATEMATIK
Göteborgs Universitet
J.L.

Datum: 98-01-10
Hjälpmedel: Inga

Tid: 08.45-13.45
Telefonvakt: Martin Brundin
Tel.: 0740-479626

Tentamensskrivning i MAN 040, Linjär Algebra, del 2

Teoriuppgifter

1. Låt A vara en reell $n \times n-$matris. Definiera först vad som menas med att A är symmetrisk.
   Visa sedan att om A är symmetrisk så måste två egenvektorer vara ortogonala om de hör till olika egenvärden. (3p)

2. Avgör vilka av följande utsagor som är sanna och vilka som är falska. Bevisa de sanna utsagorna och motbevisa de falska, t.ex. genom att ge ett motexempel.
   (a) Om A är inverterbar och $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A så är $\mathbf{v}$ också en egenvektor till A^{-1}
   (b) Om U och V är unitära så är UV det också
   (c) Om A är reell och diagonaliserbar så är A symmetrisk

   (3p)

Problemuppgifter

3. Bestäm det kortaste avståndet från punkten $(1,1,1,1)$ till det underrum i $\mathbb{R}^4$, som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} = (1,-1,0,1)$ och $\mathbf{v} = (1,1,-1,0)$. (3p)

4. Finn en ortogonal bas för det underrum av $\mathbb{R}^5$, som spänns upp av vektorerna
$$(1,0,1,0,0),\quad (1,1,0,0,0),\quad (0,1,0,1,1),\quad (0,0,1,1,1)$$
   (3p)

5. Antag att $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, $k = 0,1,2,3\ldots$, där
$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   Visa att gränsvärdet $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$ existerar för varje startvärde $\mathbf{x}_0$. Bestäm också gränsvärdet om $\mathbf{x}_0 = (1,2,3)$. (4p)

6. Låt p vara en reell parameter. Man vet att den kvadratiska formen
$$Q(x,y) = (1+p)(x^2+y^2) + 2(1-p)xy$$
   har det största värdet 3 på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Bestäm p. Ange också det minsta värde som Q antar på enhetscirkeln! (3p)

VÄND!

7. Konstruera en $3 \times 3-$matris med följande tre egenskaper:

   alla element i matrisen är reella tal
   $(1, 0, 0)$ och $(0, 1, i)$ är egenvektorer
   talet $1 + i$ är ett egenvärde

   Välj enkla siffror! (3p)

8. Låt A och B vara godtyckliga matriser sådana att produkten AB är definierad. Visa att rangen av AB varken överstiger rangen av A eller rangen av B. (3p)

Skrivningen beräknas vara färdigrättad den måndag den 19 januari, efter kl. 14.
Resultaten anslås i bottenvåningen på Matematiskt Centrum (MC).
Du kan också få veta resultatet genom att ringa nummer 772 35 09, efter kl. 14.
Din rättade skrivning kan hämtas efter angivet datum i mottagningsrummet
(MC rum 1202D) , måndag - fredag kl. 12 - 13