MATEMATIK	Datum: 98-04-08	Tid: 08.45-13.45
Göteborgs Universitet	Hjälpmedel: Inga	Telefonvakt: Sebastian Sandberg
J.L.		Tel.: 0740-479626

Tentamensskrivning i MAN 040, Linjär Algebra, del 2

Teoriuppgifter

1. Låt $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ vara en bas för vektorrummet V. Visa, genom att använda egenskaperna hos en bas, att varje $\mathbf{x} \in V$ på ett entydigt sätt kan skrivas som en linjärkombination av $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. (3p)

2. Definiera följande begrepp:

   (a) Rangen av en matris.

   (b) Det ortogonala komplementet av ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

   (c) En kvadratisk form på $\mathbb{R}^2$.

   (d) Ett egenrum till en kvadratisk matris.

   Låt sedan A vara en $m \times n-$matris med rangen r. Bestäm dimensionen av det ortogonala komplementet till kolonnrummet för A. (4p)

Problemuppgifter

3. (a) Bestäm en Hermitesk $2 \times 2-$matris vars första *rad* innehåller talen i och 2.

   (b) Bestäm en unitär $2 \times 2-$matris, vars första *kolonn* är proportionell mot

$$\begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix}$$

   Endast svar krävs på denna uppgift! (3p)

4. Finn en ortogonal diagonalisering av matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (3p)

5. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x'(t) = & -0.6x(t) \quad +0.8y(t), \quad x(0) = 1 \\ y'(t) = & +0.8x(t) \quad +0.6y(t), \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

   (3p)

VÄND!

6. Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $(1,1,1,1)$ på lösningsmängden till systemet
$$\begin{cases} x_1 -x_3 -2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 -4x_4 = 0 \end{cases}$$
(3p)

7. Antag att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ vara en ortonormal mängd i $\mathbb{R}^n$. Betäm ett nödvändigt och tillräckligt villkor på talen a, b, c för att även $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ skall vara en ortonormal mängd om
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{u}_2 &= b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{u}_3 &= c\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2 + b\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$
(3p)

8. Låt A vara den $n \times n-$matris vars alla element är 1, utom diagonalelementen, som alla är 0. Bestäm alla egenvärden till A och ange dimensionen av motsvarande egenrum. (3p)

Skrivningen beräknas vara färdigrättad den 20 april, efter kl. 14.
Resultaten anslås i bottenvåningen på Matematiskt Centrum (MC).
Du kan också få veta resultatet genom att ringa nummer 772 35 09, efter kl. 14.
Din rättade skrivning kan hämtas efter angivet datum i mottagningsrummet
(MC rum 1202D) , måndag - fredag kl. 12 - 13