Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Telefon: Sebastian Sandberg, sök. 0740-47 96 26
1998–06–06 kl. 8.45–13.45

MAN040, Linjär Algebra, del 2

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

Teoridel:

1. Låt W vara ett delrum till $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}$ en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^n$ och $\hat{\mathbf{x}}$ den ortogonala projektionen av $\mathbf{x}$ på W. Visa att $\hat{\mathbf{x}}$ är den vektor i W som ligger närmast $\mathbf{x}$. (3p)

2. Låt W vara ett n-dimensionellt vektorrum, med $n \geq 1$. Visa följande 2 utsagor.

   a) Varje linjärt oberoende mängd med exakt n element i W är en bas för W.

   b) Varje mängd med exakt n element som spänner W är en bas för W.

   (3p)

Problemdel:

3. Bestäm en ortogonalbas för delrummet W i $\mathbb{R}^4$, där W består av alla vektorer ortogonala mot $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, 1)$ och $\mathbf{v}_2 = (2, 3, -1, 2)$. (3p)

4. Bestäm en bas för lösningsrummet H till differensekvationen

$$y_{k+2} - 4y_k = 0,$$

   och tag i denna bas fram matrisen för avbildningen $T : H \to H$ som avbildar följden (y_k) på följden (y_{k+2}). (3p)

5. Låt

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Man kan se att $\mathbf{b}$ inte tillhör kolonnrummet till A. Beräkna den ortogonala projektionen $\hat{\mathbf{b}}$ av $\mathbf{b}$ på $\mathrm{Col}(A)$ samt en vektor $\mathbf{x}$ sådan att $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$. (3p)

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$. Bestäm A:s singulära värden och bestäm en enhetsvektor $\mathbf{v}$, sådan att $A\mathbf{v}$ har maximal längd. Ange en singulär värdesuppdelning av A. (3p)

7. Lös det kontinuerliga dynamiska systmeet

$$\begin{cases} x_1'(t) = & x_1(t) & -x_2(t) \\ x_2'(t) = & -4x_1(t) & +x_2(t) \end{cases}.$$

   Vad blir lösningen om $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$, och vad händer då $t \to \infty$? Vad blir lösningen då $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, och vilken rikting i planet rör sig $\mathbf{x}(t)$ asymptotiskt mot då $t \to \infty$. (4p)

8. Betrakta matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & 4 \end{bmatrix}.$$
Bestäm alla b, c sådana att A är Hermitesk och har egenvärdet 0. Diagonalisera A unitärt (dvs $A = UDU^*$, $U^* = U^{-1}$) i dessa fall. (3p)

Skrivningen beräknas vara färdigrättad senast fredagen den 12 januari, kl. 13. Resultaten anslås i bottenvåningen på Matematiskt Centrum (MC). Du kan också få veta resultatet genom att ringa nummer 772 35 09, efter kl. 14. Jag kommer att finnas på mitt rum (nr 1245, tel 772 53 04) för frågor under **eftermiddagen fredag 12 juni från kl 13**.

OBS: Lista över de som är godkända på alla moment av 2 poängs projektdelen finns anslagen i bottenvåningen på Matematiskt Centrum (MC). Har du något moment kvar, t.ex. missat på det skriftliga projektprovet, och vill bli klar med denna del? Kontakta i så fall mig snarast, via email på `delin@math.chalmers.se` eller lämna meddelande på min telefonsvarare, tel 772 53 04, så att det finns möjlighet att få detta klart till fredag. Observera att fredagen är enda tiden jag planerat vara på institutionen, men hör av dig om du behöver träffa mig en annan tid för att avsluta denna del.

Lycka till!

Henrik Delin