MATEMATIK
Göteborgs universitet
Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Telefon: Niklas Lindholm, sök. 0740-47 96 26
1998–08–24 kl. 8.45–13.45

MAN040, Linjär Algebra, del 2

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ vara en bas för ett vektorrum V. Visa att för varje $\mathbf{v}$ i V, så finns det exakt en uppsättning skalärer $c_1, \ldots c_k$ sådana att

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_k\mathbf{b}_k.$$

(3p)

2. Låt A vara en godtycklig matris, och antag att $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Visa att då är $\hat{\mathbf{x}}$ också en minsta kvadratlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (3p)

3. Bestäm en vektor $\mathbf{w}$ som ligger i $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ och är ortogonal mot $\mathbf{u}$, om $\mathbf{u} = (1, 0, 2, 2)$ och $\mathbf{v} = (-2, 1, 3, 0)$. (3p)

4. Bestäm standardmatrisen för den ortogonala projektionen i $\mathbb{R}^3$ på planet $x - 2y - z = 0$. Beräkna också projektionen av vektorn $(1, 1, 0)$. (3p)

5. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

(3p)

6. Låt $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^n$, ortonormala mot varandra. Standardmatrisen för projektion på $\mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1\}$ är då $P_1 = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T$, och likaledes för $\mathrm{Span}\{\mathbf{u}_2\}$, så är $P_2 = \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T$. Dessutom är standardmatrisen för projektion på $\mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ $P = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T$. Ange med en kort motivering kolonnrummet och rangen för matriserna P_1, P_2 och P. (3p)

7. Betrakta den kvadratiska formen formen

$$Q(x, y, z) = x^2 + 8y^2 + 6yz$$

Visa att dess största värde på enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ är 9, och att det antas då $(x, y, z) = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}(0, 3, 1)$. För vilka (x, y, z) på enhetssfären är Q så stor som möjligt, om (x, y, z) dessutom skall vara ortogonal mot $(0, 3, 1)$? (4p)

8. Låt W vara det linjära rummet av alla polynom av grad högst 5, där alla termer har udda grad. Välj en bas för W, och beräkna matrisen för avbildningen $T : W \to W$, där $T(p(t)) = tp'(t) + p''(t)$. Vilka polynom p i W avbildas på sig själva, dvs $T(p(t)) = p(t)$? (3p)

Lycka till!

H.D. / J.L.