Linjär Algebra, del 1, VT 98

Blandade övningar, vecka 9,10,11

J.L./T.W. 20 februari 1998

Vecka 9

9. Finn inverserna till följande 4×4-matriser

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Är matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

invers till någon matris? Vilken i så fall?

11. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning vars standardmatris är

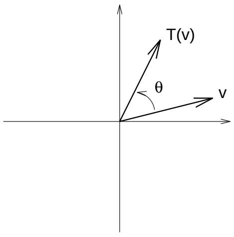
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sätt $\mathbf{u} = (4, -1, -3)$.

(a) Vad är bilden av $\mathbf{u}$?

(b) Vilken vektor avbildas på $\mathbf{u}$?

12. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som roterar en vektor vinkeln θ moturs. (Se figuren.) Bestäm matriserna för $T_1 = T$, $T_2 = T \circ T_1$ och $T_3 = T \circ T_2$.



13. I denna uppgift gäller det att undersöka matrisekvationen

$$X^2 = I \tag{1}$$

Det ligger nära till hands att tro att lösningarna är $X = \pm I$. Dessa två matriser löser verkligen (1), men det finns en väldig massa andra lösningar.
Antag att X är en 2×2-matris.

(a) Visa att matriserna

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

uppfyller ekvationen (1) för varje val av b och c.

(b) Visa att om $b \neq 0$ så satisfierar följande matris ekvationen:

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 1/b & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Finn alla 2×2-matriser som satisfierar (1).

Vecka 10

14. Beräkna determinanterna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

15. Bestäm alla tal λ sådana att

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

16. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ -5/4 & -9/4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Beräkna AB. Är A inverterbar? Är AB inverterbar?

(b) Beräkna BA. Är B inverterbar? Är BA inverterbar?

(c) Beräkna AA^T. Är AA^T inverterbar?

(d) Beräkna A^TA. Är A^TA inverterbar?

17. Skriv upp en 3×3-matris som uppfyller följande villkor

(a) matrisen består av enbart nollor och ettor

(b) alla diagonalelement är noll

(c) det finns fler ettor än nollor

(d) matrisen är inverterbar

Bestäm sedan inversen.
(Heder och ära till den som kan skriva upp alla sådan matriser!)

18. Välj parametrarna p och q så att nedanstående linjära ekvationssystem har

(a) en entydigt bestämd lösning

(b) mer än en lösning

(c) ingen lösning

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + px_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = q \\ x_2 + x_3 = p \end{cases}$$

19. Betrakta planet π med ekvationen $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ och sätt $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$. Den linjära avbildningen T avbildar en vektor $\mathbf{x}$ på skärningspunkten mellan π och linjen genom $\mathbf{x}$ med riktningen $\mathbf{u}$. Rita en principskiss som beskriver avbildningen T och finn standardmatrisen för T.

20. Betrakta planet

$$\begin{cases} x = & t & -s \\ y = & -t & +s \\ z = & 3t & +4s \end{cases}$$

Bestäm standardmatrisen för den ortogonala projektionen i planet.

21. Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Avgör vilka av följande utsagor som är sanna och vilka som är falska. Bevisa de sanna utsagorna och motbevisa de falska!

    (a) Om $\{v_1, \cdots, v_m\}$ är linjärt oberoende så är även $\{T(v_1), \cdots, T(v_m)\}$ linjärt oberoende.

    (b) Om $\{v_1, \cdots, v_m\}$ är linjärt beroende så är även $\{T(v_1), \cdots, T(v_m)\}$ linjärt beroende.

    (c) Om $\{v_1, \cdots, v_m\}$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ så gör $\{T(v_1), \cdots, T(v_m)\}$ det också.

    (d) Om $\{T(v_1), \cdots, T(v_m)\}$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ så gör $\{v_1, \cdots, v_m\}$ det också.

22. Beräkna värdet av $n \times n$-determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

där $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$.

Vecka 11

23. Bestäm baser för kolonnrummet, nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

24. Sätt $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ och $u_2 = (1, -1, 1, -1)$. Finn en bas i $\mathbb{R}^4$ som innehåller u_1 och u_2.

25. Diagonalisera blockmatrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & -12 & 6 \end{bmatrix}$$

26. (a) Visa att om A är diagonaliserbar och $A^m = 0$ för något heltal m så är $A = 0$.

(b) Finn alla 2×2-matriser

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

sådana att $A^2 = 0$.

27. Låt A vara en kvadratisk matris sådan att

$$A^3 - A + I = 0$$

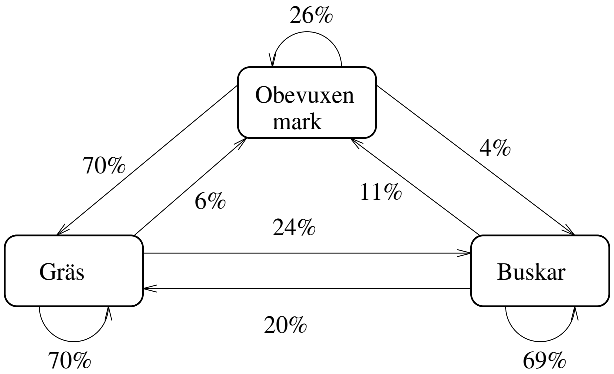
Visa att A är inverterbar.

28. Diagonalisera matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

29. Låt $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den ortogonala projektionen på planet $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$. (a) Bestäm standardmatrisen för P. (b) Finn egenvärdena till P. (c) Finn en bas av egenvektorer till P.

30. Efter en skogsbrand ligger ett tusen kvadratmeter stort område helt obevuxet. Så småningom återerövrar gräs och buskar marken. Det sker årligen dels genom att 70% av obevuxen mark tas över av gräs, dels genom att 24% av gräsmarken beväxes med buskar. En viss del av buskvegetationen (20%) återgår till gräsmark. På grund av hårda klimatförhållanden dör 11% av buskarna och lämnar obevuxna områden efter sig. Även en del av gräsen (6%) försvinner och erätts med obevuxen mark. Årligen erövrar buskvegetationen en mindre del (4%) obevuxen mark. Situationen kan beskrivas i följande diagram som således anger årliga förändringar i vegetationens utbredning.



Låt nu x_1 vara arean obevuxen mark, x_2 vara arean gräsmark och x_3 vara arean med buskvegetation under ett visst år. Nästa års vegetation motsvarande areor betecknas med y_1, y_2 respektive y_3. Enligt diagrammet ovan har man då

$$\mathbf{y} = M\mathbf{x} \quad \text{där} \quad M = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.06 & 0.11 \\ 0.70 & 0.70 & 0.20 \\ 0.04 & 0.24 & 0.69 \end{bmatrix}$$

Bestäm den långsiktiga fördelningen mellan obevuxen mark, gräsmark och buskvegetation. (Ledning: Matrisen M har egenvärdena $1/4$, $2/5$ och 1.)

31. Antag att A är en kvadratisk matris, sådan att $I - A$ är inverterbar. Visa följande generalisering av formeln för den geometriska summan

$$I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1} = (I - A)^{-1}(I - A^n) = (I - A^n)(I - A)^{-1}$$

32. Konstruera en övre triangulär matris U med minst sex olika element så att $u_1 = [\,1\ 1\ 1\,]^T$ är en egenvektor till U. Motivera!

33. Skriv upp den elementära matris E som har egenskapen att

$$EA = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -5 \\ -5 & -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ om } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ -5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Beskriv i ord effekten av att multiplicera A med E från vänster. Beräkna sedan AE och beskriv i ord effekten av att multiplicera A med E från höger. Beräkna slutligen inversen till E och beskriv i ord effekten av att multiplicera A från vänster med inversen.

Svar

9.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Ja, matrisen är invers till

$$\frac{1}{18}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

11. (a) Bilden av $\mathbf{u}$ är $(0, 5, 0)$.

(b) $(4.6, -4.4, -3.2)$ avbildas på $\mathbf{u}$.

12. Matrisen för T_n är

$$\begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$$

13. Förutom de matriser som är angivna i uppgiften finns följande lösningar

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

där $c = (1 - a^2)/b$ och $b \neq 0$.

14. Determinanternas värden är -12 respektive -160.

15. $\lambda = 2 \pm \sqrt{5}$

16. (a) Nej! (Det är bara kvadratiska matriser som kan vara inverterbara!)

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ är (givetvis) inverterbar.}$$

(b) Nej, som sagt!

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -8 & -7 & -6 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ är inte inverterbar.}$$

(c)

$$AA^T = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{bmatrix} \text{ är inverterbar.}$$

(d)

$$A^TA = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \text{ är inte inverterbar.}$$

17. Exempelvis följande invers

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

18. (a) gäller då och endast då $p \neq 3/2$
(b) gäller då och endast då $p = q = 3/2$
(c) gäller då och endast då $p = 3/2$, $q \neq 3/2$

19.

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 3.0 & -4.5 \\ -1.0 & 3.0 & -3.0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

20.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ -0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

21. (a) och (c) är falska, (b) och (d) är sanna.

22. Determinanten har värdet 0.

23. En bas för kolonnrummet är kolonnerna i A med nummer 1, 3, 5. En bas för radrummet är de tre första raderna i A. En bas för nollrummet är

$$[-2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T\ ,\ [1\ 0\ -1\ 1\ 0\ 0]^T\ ,\ [0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 1]^T$$

24. Valmöjligheterna är oändliga. Man kan till exempel ta

$$u_3 = (1, 0, 0, 0)\ ,\ u_4 = (0, 1, 0, 0)$$

25. Matrisen kan skrivas PDP^{-1} där

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}\ ,\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\ ,$$

26. (b) $d = -1$, $c = -1/b$, $b \neq 0$.

27. Skriv om ekvationen på formen $A(I - A^2) = I$.

28. $A = PDP^{-1}$ där

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ ,\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$B = PDP^{-1}$ där

$$D = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{bmatrix}\ ,\ P = \begin{bmatrix} 2 & 1+\sqrt{5} \\ 1+\sqrt{5} & -2 \end{bmatrix}$$

29. (a)

$$\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

(b) $0, 1, 1$

(c) $(1, 2, 3), (2, -1, 0), (3, 0, -1)$

30. 10 procent obevuxen mark, 50 procent gräs, 40 procent buskvegetation.

31. Multiplicera vänster led med $I - A$ från vänster resp. höger.

32. Till exempel

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

33.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$