Grupparbetsuppgift G3 i Linjär Algebra, del 2, VT 99

J.L.

Vart tar den goa värmen vägen.

Denna uppgift handlar om värmefördelning i en tunn tråd, som antas isolerad från omgivningen. För att få en modell som kan behandlas med linjär algebrans verktyg, tänker vi oss att tråden består av punkter $p_j = j \cdot h$, där j genomlöper alla hela tal. Vi intresserar oss för temperaturen i punkterna p_j vid tidpunkterna $t_k = k \cdot t$, där $k = 0, 1, 2, \ldots$. Låt denna temperatur vara $T_k(j)$. När temperaturfördelningen befinner sig i jämvikt gäller att temperaturen i punkten p_j är medelvärdet av temperaturen i de båda angränsande punkterna p_{j-1} och p_{j+1}, dvs

$$T_k(j) = \frac{T_k(j+1) + T_k(j-1)}{2}$$

Så länge jämvikt inte råder kommer temperaturfördelningen i punkten p_j vid nästa tidpunkt t_{k+1} att bestämmas av temperaturen vid tiden t_k och en korrektionsterm, som antas vara proportionell mot avvikelsen mellan temperaturen i p_j och medelvärdet av temperaturerna i de båda angränsande punkterna, alltså

$$T_{k+1}(j) = T_k(j) + c\Big(\frac{T_k(j+1) + T_k(j-1)}{2} - T_k(j)\Big) \tag{1}$$

Här är c en (liten) positiv konstant som beskriver hur värmen sprider sig längs tråden.

Det gäller nu att studera den långsiktiga temperaturfördelningen i en kort bit av tråden, representerat av punkterna $p_1, \ldots, p_N$. Man antar att initialtemperaturen (alltså temperaturen vid tiden $t = 0$) är känd i dessa punkter. Två fall skall studeras: Dels

- trådbitens ändar hålls vid fixa temperaturer,

och ett av fallen

- trådbiten “klipps av” och hålls isolerad från resten av tråden.
- trådbiten “klipps av” och dess ändar sätts ihop till en ring.

Uppgifter:
Formulera problemet i kursens matematiska språk! Observera speciellt hur korrektionsfaktorn i (1) måste ändras i punkterna p_1 och p_N i respektive fall.

Testkör med datorns hjälp några få olika initialtemperaturer! Hur kommer temperaturen i trådbiten att utvecklas med tiden för olika initialtemperaturer i de båda fallen?

Diskutera resultatens fysikaliska relevans och sambandet mellan matematisk modell och verklighet.

Relatera resultaten till problemets egenvärden och motsvarande egenrum!
(Det är en merit, men inte ett krav, om man kan genomföra en matematisk analys, som är så oberoende av datorkörningar som möjligt!)

Skriv en rapport som sammanfattar resultat och diskussioner.