MATEMATIK
Göteborgs Universitet
A.Heintz

Datum: 98-10-27
Hjälpmedel: Inga

Tid: 08.45-13.45
Telefonvakt: Anette Wiberg
Tel.: 0740-479626

Lösningar till Tentamensskrivning i Linjär Algebra, MAN040, del 1

Teoriuppgifter

1. (3p)

2. (3p)

Problem uppgifter

3. Bestäm den allmänna lösningen till systemet $Ax = b$, där $x \in \mathbb{R}^4$ och skriv den på vektorform.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 \\ 6 & -3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & 14 & -31 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Bestäm också en bas i $\mathrm{Col}(A)$ och en bas i $\mathrm{Nul}(A)$. (3p)

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & 18 \end{pmatrix} \tilde{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -17 & 8 \end{pmatrix} \tilde{}$$

$$\tilde{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & -5/16 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -17/8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allmänn lösning är:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 5/16 \\ 0 \\ 17/8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

basen till $\mathrm{Nul}(A)$ är $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5/16 \\ 0 \\ 17/8 \\ 1 \end{pmatrix};$

basen till $\mathrm{Col}(A)$ består av pivotkolonner $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}$

4. Bestäm spegelbilden Q av punkten $P = (2, -5, 7)$ med avseende på linjen genom punkterna $M_1 = (5, 4, 6)$ och $M_2 = (-2, -17, -8)$. (3p)

Svar: $Q = (4, 1, -3)$.

Lösningen. Om projektionen av vektorn M_2P på linjen beteknas med M_2D då

$$\vec{M_2D} = \frac{\vec{M_2M_1} \cdot (\vec{M_2D} \cdot \vec{M_2M_1})}{|\vec{M_2M_1}|^2}$$

$\vec{PD} = \vec{M_2D} - \vec{M_2P}$, $\vec{Q} = \vec{P} + 2\vec{PD}$.

$\vec{M_2M_1} = (5, 4, 6) - (-2, -17, -8) = 7(1, 3, 2)$; $\quad |\vec{M_2M_1}| = \sqrt{7^2(1 + 9 + 4)} = 7\sqrt{14}$;

$\vec{M_2P} = (2, -5, 7) - (-2, -17, -8) = (4, 12, 15)$;

$\vec{M_2D} = 5(1, 2, 3)$;

$\vec{PD} = (1, 3, -5)$; $\vec{Q} = \vec{P} + 2\vec{PD} = (4, 1, -3)$.

5. Visa att planet $5x - 2y + z - 1 = 0$ inte skär sträckan med ändpunkter $M_1 = (1, 4, -3)$, $M_2 = (2, 5, 0)$. (3p) Insättning av punkterna M_1 och M_2 in i ekvationen till planet ger -7 och -1. Detta betyder att punkterna befinner sig på samma sidan av planet. Så sträckan M_1M_2 skär inte planet eftersom denna helt ligger på en sida av planet.

6. Bestäm om följande matriser kan diagonaliseras
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
(3p)

   Vo bestämmer egenvärden till A och till B dvs. rötterna av ekvationerna $\det(A - \lambda I) = 0$ och $\det(B - \lambda I) = 0$ Matrisen A har ett multipel egenvärde $\lambda = 2$ och om vi hittar bara en linjärt oberoende egenvektor som hör till detta. Matrisen B har två olika egenvektorer $\lambda = 1$ och $\lambda = 4$. Motsvarande egenvektorer skall vara linjärt oberoende. B är diagonaliserbar enligt en sats.

7. Visa att om λ är egenvärden till matrisen A då är λ^2 egenvärden till A^2.

   (3p)

   Om $Ax = \lambda x$ då $A^2x = AAx = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda\lambda x = \lambda^2 x$. Detta betyder att λ^2 är ett egenvärde till A^2 med det samma egenvektor x.

8. Hur ändras inversen A^{-1} till en given matris A om

   a) i-te och j-te raden i A byter plats ? (2p)

   b) i-te raden i A multipliceras med ett tal α skilt från noll ? (2p)

Om A är inverterbar, då $A^{-1} = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_k$ där E_l, $l = 1...k$ är "elementära matriser". Byter vi i-te och j-te raderna i A, är det samma om vi multiplicerar A från vänster med en elementär matris E_{ij} som utgör den transformationen: $A^* = E_{ij}A$.

E_{ij} är "enhetsmatrisen I där raderna i och j ändrat plats".

Från standarta formler för inversen av produkten av matriser får vi att $A^{*-1} = A^{-1}E_{ij}^{-1}$. Eftersom vi multiplicerar A^{-1} från höger med E_{ij}^{-1} verkar detta så att i-te och j-te kolonnerna i A^{-1} byter plats.

Liknande, men enklare resonemang medför att om man multiplicerar i-te raden i A med ett tal α då ändras inversen A^{-1} till A så att i-te kolonnen in den nya A^{-1} delas med α.