MATEMATIK
Göteborgs universitet

ANDRA INLÄMNINGSUPPGIFTEN I KURSEN ELEMENTÄR TALTEORI 2001

(**1**) Låt $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Definiera

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n, d>0} d^k.$$

Vi ser direkt att $\sigma_0 = \nu$ och $\sigma_1 = \sigma$. Visa följande påståenden:

(a) Funktionen σ_k är multiplikativ.

(b) Om $k > 0$ och $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ är primtalsfaktoriseringen av n så är

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{(a_i+1)k} - 1}{p_i^k - 1}$$

(**2**) Låt k vara ett fixt positivt heltal. Visa följande påståenden:

(a) Ekvationen $\nu(n) = k$ har oändligt många lösningar.

(b) Ekvationen $\sigma(n) = k$ antingen saknar lösning eller har ändligt många lösningar.

(**3**) Visa att $n^{12} \equiv 1 \mod 72$ för alla $n \in \mathbb{Z}$ som är relativt prima med 72.

(**4**) Låt p vara ett udda primtal. Visa följande påståenden:

(a) Kongruensen $x^2 + 2 \equiv 0 \mod p$ är lösbar precis då $p \equiv 1, 3 \mod 8$.

(b) Kongruensen $x^2 \equiv 3 \mod p$ är lösbar precis då $p \equiv \pm 1 \mod 12$.

(**5**) Finn *alla* lösningar till kongruensen $2x^2 + x \equiv 5 \mod 6$.

Ni får gärna samarbeta när ni löser uppgifterna, men var och en måste formulera och skriva ned sina egna lösningar. Sista dag för att lämna in lösningarna är *torsdagen den 2 augusti*. Tre eller fler korrekt lösta uppgifter ger ett bonuspoäng på tentan. Lösningarna skall var välformulerade och prydligt skrivna.