

Lösningar till Flervariabelanalys i Naturvetarmatematik B, 2/6-05

1. (a) Nivåkurvorna är rätta linjer

$$1 - x + 2y = C$$

med $C \neq 0$.

- (b) Funktionen växer snabbast i gradientens riktning. Denna är i sin tur ortogonal mot nivåkurvorna och har därför enligt (a) riktningen $(-1, 2)$ eller $(1, -2)$. Kontroll i figurer till (a) visar att det är i $(1, -2)$ den växer i punkten $(2, 1)$. Man kan förstås också direkt beräkna gradienten, eftersom man ändå blir tvungen att göra det i (c).

- (c) Vi har

$$f'_x = (1 - x + 2y)^{-2} \text{ och } f'_y = -2 \cdot (1 - x + 2y)^{-2}$$

Speciellt har vi då $f'_x(2, 1) = 1$ och $f'_y(2, 1) = -2$. Detta ger för gradienten $\text{grad } f(2, 1) = (1, -2)$. Allmänt gäller för varje enhetsvektor $\mathbf{v}$ att

$$f'_{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \cdot \text{grad } f$$

I uppgiften skall vi ha $\mathbf{v}$ som den normerade gradienten. Detta ger $f'_{\mathbf{v}}(2, 1) = |\text{grad } f(2, 1)| = \sqrt{5}$.

- (d) Vi deriverar vidare och får

$$f''_{xx} = 2 \cdot (1 - x + 2y)^{-3}, \quad f''_{xy} = -4 \cdot (1 - x + 2y)^{-3} \text{ och } f''_{yy} = 8 \cdot (1 - x + 2y)^{-3}$$

och alltså

$$f_{xx}(2, 1) = 2, \quad f''_{xy}(2, 1) = -4 \text{ och } f''_{yy}(2, 1) = 8$$

Det sökta taylorpolynomet är

$$f(2, 1) + f'_x(2, 1)(x-2) + f'_y(2, 1)(y-1) + \frac{1}{2} (f''_{xx}(2, 1)(x-2)^2 + 2f''_{xy}(2, 1)(x-2)(y-1) + f''_{yy}(2, 1)(y-1)^2)$$

det vill säga

$$1 + (x-2) - 2(y-1) + (x-2)^2 - 4(x-2)(y-1) + 4(y-1)^2 = 1 + x - 2y + x^2 - 4xy + 4y^2$$

Man kan också utnyttja utvecklingen

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots$$

med $t = x - 2y$

2. D kan analytiskt beskrivas genom olikheterna $0 \leq 2x - y \leq 4$ och $0 \leq 2x + y \leq 4$. Eftersom dessutom $4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y)$ gör vi variabelsubstitutionen $u = 2x - y$, $v = 2x + y$. I dessa variabler kan området beskrivas genom

$$E: 0 \leq u \leq 4 \text{ och } 0 \leq v \leq 4$$

Vidare får vi funktionaldeterminanten

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Detta ger

$$du \, dv = 4 \, dx \, dy \quad \text{dvs} \quad dx \, dy = \frac{1}{4} du \, dv$$

Den sökta integralen är då

$$\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} \, dx \, dy = \frac{1}{4} \iint_E \sqrt{uv} \, du \, dv = \frac{1}{4} \left(\int_0^4 \sqrt{u} \, du \right) \cdot \left(\int_0^4 \sqrt{v} \, dv \right) = \frac{1}{4} \left(\left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^4 \right)^2 = \frac{64}{9}$$

Svar: 64/9

3. Med hjälp av kedjeregeln får vi

$$\begin{cases} z'_x &= z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = az'_u + bz'_v \\ z'_y &= z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = bz'_u - az'_v \end{cases}$$

Vi har därför

$$2z'_x + z'_y = (2a + b) \cdot z'_u + (2b - a) \cdot z'_v$$

Nu väljer vi $a = 2$ och $b = 1$, vilket ger $2z'_x + z'_y = 5 \cdot z'_u$ och alltså i differentialekvationen

$$z'_u = 0$$

Detta är ekvivalent med att $z = h(v) = h(x - 2y)$, där h är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel.

Svar: $z = h(x - 2y)$, där h är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel.

4. Genom att räkna ut $\operatorname{div} \bar{F}$

$$\iiint_K \operatorname{div} \bar{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_K (y^2 + z^2 + x^2) \, dx \, dy \, dz$$

där K är klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Vi inför sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{cases} \quad \text{som leder till } dx \, dy \, dz = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Därigenom får vi

$$\iiint_K (y^2 + z^2 + x^2) \, dx \, dy \, dz = \iiint_K r^2 \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \int \operatorname{div} \bar{F} \, dx \, dy \, dz \, d\varphi$$

Eftersom integrationsområdet är $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ får vi alltså

$$\iiint_K \operatorname{div} \bar{F} \, dx \, dy \, dz = 2\pi \left(\int_0^1 r^4 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right) = 2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{4\pi}{5}$$

Svar: $\frac{4\pi}{5}$

5. Med de givna uppgifterna är $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ och den totala utsläppsmängden M gram uppskattas med den generaliserade integralen

$$M = \iint_D e^{-0.01d} \, dx \, dy,$$

där D är hela planet. Vi inför koordinater $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ som leder till att $dx \, dy = r \, dr \, d\phi$ och låter D_n vara cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq n^2$. Vi har då

$$\iint_D e^{-0.01d} \, dx \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} e^{-0.01\sqrt{x^2+y^2}} \, dx \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(\int_0^{2\pi} e^{-0.01r} \, d\phi \right) r \, dr$$

vilket leder till

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \int_0^n r e^{-0.01r} \, dr.$$

Genom partiell integration har vi

$$\int_0^n r e^{-0.01r} \, dr = [-100r e^{-0.01r}]_0^n + 100 \int_0^n e^{-0.01r} \, dr = -100n e^{-0.01n} + 100 [-100e^{-0.01r}]_0^n$$

vilket ger

$$M = 20000\pi(1 - (1 + 0.01n)e^{-0.01n}) \rightarrow 20000\pi$$

då $n \rightarrow \infty$.

Svar: Utsläppet uppskattas till 20π kg, dvs ca 63 kg.

6. Då $x \geq 0$ och $y \geq 0$ gäller ju $f(x, y) \geq 0$. Eftersom $f(0, 0) = 0$ har funktionen alltså minsta värdet 0 och det antas i origo. På en linje $x + y = a$ med $a > 0$ är $f(x, y) = (x + y^2)e^{-a} = (a - y + y^2)e^{-a}$. Den del av linjen som ligger i första kvadranten svarar mot $0 \leq y \leq a$, så vi undersöker maximum av $g(y) = a - y + y^2$ på detta intervall. Eftersom $g'(y) = 2y - 1$ följer att g har maximum i någon av ändpunkterna (Punkten $y = 1/2$ ger minimum om den ingår i intervallet.) Vi har $g(a) = a^2$ medan $g(0) = a$, så om $0 \leq a \leq 1$ är $g(0)$ störst, medan $g(a)$ är störst om $a \geq 1$. För funktionen f innebär detta att på ett linjestycke $x + y = a$ i 1:a kvadranten är funktionen störst i någon av ändpunkterna. Eftersom varje punkt i 1:a kvadranten ligger på en sådan linje kan inte en punkt med både $x > 0$ och $y > 0$ ge ett största värde, det finns alltid punkter på axlarna som ger större värden. Problemet är därigenom reducerat till att undersöka hur stora funktionerna $f(x, 0) = xe^{-x} = h_1(x)$ och $f(0, y) = y^2e^{-y} = h_2(y)$ kan vara på $x \geq 0$ respektive $y \geq 0$. Vi deriverar och får

$$h_1'(x) = (1 - x)e^{-x} \quad \text{respektive} \quad h_2'(y) = (2y - y^2)e^{-y} = y(2 - y)e^{-y}$$

Derivatornas teckenväxlingar visar att $x = 1$ respektive $y = 2$ ger funktionernas största värden. För funktionen $f(x, y)$ innebär detta att den har ett största värde och att det är det största av $f(1, 0) = e^{-1}$ och $f(0, 2) = 4e^{-2}$. Eftersom $4 > e$ är $f(0, 2) = 4e^{-2}$ störst.

Svar: Minsta värde är 0 och största $4e^{-2}$.

7. Kostnaden är $2x + 3y + 4z$ kr, så problemet är att maximera $U(x, y, z) = xyz$ då $2x + 3y + 4z = 180$ och $x, y, z \geq 0$. Eftersom definitionsmängden är sluten och begränsad finns ett största värde och det antas i en punkt där $x, y, z > 0$, eftersom uppenbarligen inte $U = 0$ är maximum. Vi kan då använda Lagranges sats och vet att maximum antas i en punkt där gradienterna för U och $2x + 3y + 4z$ är parallella. Eftersom gradienten för $2x + 3y + 4z$ är $(2, 3, 4)$ antas alltså maximum i en punkt där $\text{grad} U = \lambda(2, 3, 4)$ för något tal λ . Detta ger

$$yz = 2\lambda, \quad xz = 3\lambda \quad \text{och} \quad xy = 4\lambda$$

vilket i sin tur ger

$$\frac{yz}{2} = \frac{xz}{3} = \frac{xy}{4}.$$

Eftersom $x, y, z \neq 0$ ger den första likheten att $\frac{y}{2} = \frac{x}{3}$ och den andra att $\frac{z}{3} = \frac{y}{4}$. Vi har därför

$$x = \frac{3y}{2} \quad \text{och} \quad z = \frac{3y}{4}.$$

Eftersom vi dessutom skall ha $2x + 3y + 4z = 180$ får vi

$$3y + 3y + 3y = 180$$

och alltså $y = 20$ som i sin tur leder till

Svar: $x = 30$, $y = 20$ och $z = 15$

8. Låt $P(x, y) = g(x)(x^2 - 3y^2)$ och $Q(x, y) = g(y)(y^2 - 3x^2)$. Då är integralen oberoende av vägen om $P'_y = Q'_x$ dvs om

$$g(x) \cdot (-6y) = g(y) \cdot (-6x)$$

Detta inträffar exempelvis för varje funktion g av formen $g(t) = kt$ där k är en konstant.

Eftersom integralen med sådana g är oberoende av vägen väljer vi $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ där Γ_1 går från $(-1, 0)$ till $(1, 0)$ längs x -axeln och Γ_2 går från $(1, 0)$ till $(1, 1)$ längs linjen $x = 1$.

På Γ_1 är $y = 0$ och alltså även $dy = 0$ så

$$\int_{\Gamma_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{-1}^1 kx^3 dx = 0$$

medan vi på Γ_2 har $x = 1$ och $dx = 0$ och alltså

$$\int_{\Gamma_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_0^1 ky(y^2 - 3) dy = k \left[\frac{1}{4}y^4 - \frac{3}{2}y^2 \right]_0^1 = k \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) = -k\frac{5}{4}$$

Tar vi här $k = -4/5$ så får integralen värdet 1.

Svar: Till exempel $g(t) = -\frac{4}{5}t$