

LÖSNINGAR till

Tentamen i Naturvetarmatematik B MMGK20 (MAN 120)

Linjär Algebra Lördag 2 juni 2007 8.30 – 13.30

Telefonvakt: Georgios Foufas, 076 – 272 1861

1. Bestäm ON-baser för kolonnrum respektive nollrum till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -8 & 16 \\ -1 & 2 & 5 & -9 \end{pmatrix} \quad (4p)$$

Lösning: genom radreducering får man $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ varav följer att de två

första kolonnerna i A utgör en bas för kolonnrummet. Gram-Schmidt ger ON-basen:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{219}} \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nollrummet hittar man genom att lösa $Ax = 0$ som ger $\begin{cases} x_1 = 3s - 7t \\ x_2 = t - s \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$. Även här

använder man Gram-Schmidt som ger svaret $\left\{ \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$. Beräkna A^n där n är ett positivt heltal. (4p)

Lösning: Diagonalisera A ! Egenvärdena blir 1 och -2, med egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Välj alltså $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ vilket gör att $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Följaktligen blir $A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. Bestäm för varje värde på konstanten s antalet lösningar till det linjära

$$\text{ekvationssystemet } Ax = b \text{ där } A = \begin{pmatrix} 1 & s & 4 \\ s & 1 & 2 \\ 2 & s & 8 \end{pmatrix} \text{ och } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (4\text{p})$$

Lösning: Man beräknar först determinanten och får $\det A = 2s(1-2s)$. Man behöver således lösa systemet för $s=0$ respektive $s=\frac{1}{2}$.

Vanlig eliminering ger att systemet har oändligt många lösningar för $s=0$ och att det saknas lösning för $s=\frac{1}{2}$. För övriga värden på s finns förstås en entydig lösning.

4. Ange minstakvadratlösningen till systemet

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2y = 1 \\ -2x + y = -1 \\ x + 5y = 1 \end{cases} \quad (4\text{p})$$

Lösning: Om systemet skrivs på matrisform, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$, ges minstakvadratlösningen av $A^t A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^t b$. Detta system har lösningen $\begin{cases} x = \frac{9}{14} \\ y = \frac{4}{31} \end{cases}$. Man kan även utnyttja att kolonnerna i A är ortogonala och i stället beräkna projektionen av b på A 's kolonnrum.

5. Låt F vara en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ sådan att $F\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Låt vidare T vara en triangel vars hörn genom F avbildas på $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beräkna arean av T . (4p)

Lösning: Man får lätt avbildningens matris f till $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Arealen av den avbildade triangeln är $= 1$, och $\det f = 3$, så arean av T blir $= \frac{1}{3}$

6. a) Visa att om matrisen A är inverterbar och diagonaliserbar är även A^{-1} diagonaliserbar.

Lösning: Eftersom A är diagonaliserbar är $A = PDP^{-1}$. Det följer att $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ där D^{-1} existerar eftersom en inverterbar matris inte kan ha egenvärdet $= 0$.

- b) En stokastisk matris M är en matris där varje element är ≥ 0 och där summan av elementen i varje kolonn blir $= 1$. Exempel: $M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$.

Visa att en stokastisk matris har egenvärdet 1.

(Ledning: betrakta $M-I$; vad gäller för kolonnerna i denna matris?)

Lösning: I matrisen $M-I$ är summan av elementen i varje kolonn $= 0$. De ligger sålunda alla i ett underrum av dimension strängt mindre än n , där n är antalet kolonner. $M-I$ är därför singulär och påståendet är visat.

- c) Låt $Ax = b$ vara ett linjärt ekvationssystem med sju ekvationer och sex obekanta. Kan det finnas något högerled b sådant att systemet har en entydig lösning? Kan systemet vara sådant att det finns entydig lösning för **varje** högerled?

(5p)

Lösning: Ja, om kolonnerna i A är linjärt oberoende och $b \in \text{Col } A$

Nej, eftersom det bara finns sex kolonner är kolonnrummet ett äkta underrum av $\mathbb{R}^7$