

Varje uppgift kan ge högst 3p, utom nr 1 som kan ge 4p. För godkänt krävs 12p. Väl godkänt på hela Naturvetarmatematik B får man om man är godkänd på var och en av de två delarna och har sammanlagt minst 36p. OBS! Alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs.

Lösningar till uppgifterna finns efter tentan på kurshemsidan

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/MAN120/V05-2/

Lycka till!/J-E A

1. Betrakta funktionen $f(x, y) = \frac{1}{1-x+2y}$.

(a) Rita några nivåkurvor för funktionen.

(b) Bestäm den riktning i vilken funktionen växer snabbast i punkten (2,1).

(c) Bestäm riktningsderivatan av funktionen i punkten (2,1) i den riktning funktionen växer snabbast.

(d) Bestäm taylorpolynomet av ordning 2 till funktionen kring punkten (2,1).

2. Beräkna

$$\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

då D är parallelogrammytan med hörnpunkterna (0,0), (1,2), (1,-2) och (2,0).

3. Lös differentialekvationen $2z'_x + z'_y = 0$ genom att införa nya variabler $u = ax + by$, $v = bx - ay$ och välj a och b lämpligt.

4. För vektorfält $\vec{F} = (P, Q, R)$ där P, Q, R är funktioner av x, y, z definieras divergensen genom

$$\operatorname{div} \vec{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$$

Antag nu att vektorfältet är hastighetsvektor för en strömning. Man kan visa att då ges nettoflödet ut genom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ av

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

där K är klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Bestäm detta nettoflöde i det fall då $\vec{F} = (xy^2, yz^2, zx^2)$.

5. Antag att man efter ett utsläpp av ett giftigt ämne från en specifik plats vill uppskatta hur stort utsläppet varit. Genom att studera förekomsten på marken av ämnet kommer man fram till att en rimlig uppskattning är att det finns $e^{-0.01d}$ gram av ämnet per kvadratmeter, där d är avståndet i meter från utsläppspunkten. Ämnet förekommer inte naturligt i marken utan allt kommer från utsläppet. För att inte komplicera det hela för sig betraktar man marken som ett plan med utsläppspunkten i origo. Vilken uppskattning av den totala utsläppsmängden får man på detta sätt?

VÄND!

6. Undersök om funktionen

$$f(x, y) = (x + y^2)e^{-x-y}$$

har något minsta och något största värde på den mängd som definieras av olikheterna $x \geq 0$ och $y \geq 0$, dvs den slutna 1:a kvadranten. Bestäm i så fall dessa värden.

7. En person anser sig varje vecka behöva konsumera tre olika produkter X, Y och Z . Priset per hg av de olika produkterna är 2, 3 respektive 4 kronor och de säljs i lös vikt. Han är villig att spendera 180 kronor per vecka. För att analysera hur mycket han skall konsumera per vecka av respektive produkt, definierar han en nyttofunktion U genom $U(x, y, z) = xyz$, där x, y och z är motsvarande kvantiteter.

Hur skall x, y och z väljas om man vill maximera nyttofunktionen $U(x, y, z)$ vid kostnaden 180 kronor per vecka?

8. Låt Γ vara en kurva som i planet sammanbinder punkterna $(-1, 0)$ och $(1, 1)$. Bestäm en funktion g av en variabel, så att

$$\int_{\Gamma} g(x)(x^2 - 3y^2) dx + g(y)(y^2 - 3x^2) dy = 1$$

oavsett vilken väg kurvan tagit mellan de båda ändpunkterna.

/ J-E A