

Varje uppgift kan ge högst 3p, utom nr ????? som kan ge 4p. För godkänt krävs 12p. Väl godkänt på hela Naturvetarmatematik B får man om man är godkänd på var och en av de två delarna och har sammanlagt minst 36p.

Alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lycka till!/J-E A

1. Bestäm alla par av tal a och b för vilka vektorfältet $(axy + y^3, x^2 + bxy^2)$ är ett potentialfält. Bestäm också i förekommande fall en potentialfunktion. (6p)

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{\sin^2 \pi(x+y)}{1+(x-y)^2} dx dy.$$

där D är kvadraten med hörnpunkterna $(\pm 1, 0)$ och $(0, \pm 1)$. (6p)

3. En kropp definieras av olikheterna $x+y+z \leq 1$ och $x, y, z \geq 0$. Bestäm kroppens totala massa om dess täthet ges av funktionen $\rho(x, y, z) = x$.

4. Lös differentialekvationen $2z'_x + z'_y = 0$ genom att införa nya variabler $u = ax + by$, $v = bx - ay$ och välj a och b lämpligt.

5. Betrakta den kropp som bestäms av olikheterna

$$3(x^2 + y^2) \leq z^2 \leq 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$$

och som har densiteten $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$. Beräkna kroppens massa.

6. Avbildningen $u = y^2$, $v = xy$ ger en inverterbar avbildning av mängden $D = \{(x, y) \mid 1 \leq xy \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$ på en mängd E i uv -planet.

(a) Bestäm mängden E . (1p)

(b) Bestäm avbildningens funktionaldeterminant. (1p)

(c) Beräkna dubbelintegralen (4p)

$$\iint_D \frac{y^2}{\sqrt{xy}(y^2 + xy - 1)^2} dx dy$$

7. Lös den partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} 3yz'_x + 2xz'_y = 0 \\ z(x, 0) = x^4 \end{cases}$$

genom substitutionen $u = 2x^2 - 3y^2$, $v = xy$.

8. En viss platta beskrivs i ett koordinatsystem genom $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$. Plattans temperatur i olika punkter ges av $T(x, y) = 30 - 0.3x^2 - 0.2y^2$. En frusen spindel startar i punkten $(8, 8)$ och går sedan hela tiden i den riktning i vilken temperaturen ökar snabbast. Längs vilken kurva i xy -planet rör sig spindeln in mot origo?

9. Bestäm talet c så att planet $x + 2y + z = c$ är tangentplan till ytan $z = x^2 + y^2$. (5p)

10. Beräkna integralen

$$\iint_D \sqrt{x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

där D är kvadraten med hörnpunkterna $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$ och $(2,0)$.

11. Transformera differentialekvationen

$$z''_{xx} - 4z''_{yy} = 1$$

genom variabelsubstitutionen $u = ax + y$, $v = ax - y$. Lös sedan den ursprungliga ekvationen genom att välja a lämpligt.

12. Betrakta problemet att bestämma den eller de funktioner $z = z(x, y)$ som uppfyller

$$\begin{cases} yz'_x - xz'_y &= x^2 - y^2 \\ z(x, x) &= 0 \end{cases}$$

Lös problemet genom att införa nya variabler $u = xy$ och $v = x^2 + y^2$

/ J-E A