

Tentamen i MAN410 Topologi, 030602, kl. 8.45-13.45. Inga hjälpmedel.

1. (10p) Vilka av följande par av topologiska rum är homeomorfa? Vilka har samma fundamentalgrupp? Motivera.
 - (a) Intervallet $(0, 1)$ och $\mathbb{E}^1$,
 - (b) Torusen $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ och sfären S^2 ,
 - (c) $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ och $\mathbb{E}^2$,
 - (d) S^1 och $\mathbb{E}^2 \setminus \{0\}$,
 - (e) Möbiusbandet och cylindern.
2. (14p) Låt X vara ett topologiskt rum och $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vara en följd i X . Man säger att följden är konvergent om det finns ett element $x \in X$ sådant att för varje öppen omgivning U till x finns ett n_0 sådant att $n > n_0$ medför att $x_n \in U$. Om detta gäller skriver man $x_n \rightarrow x$.
 - (a) Visa att om X är Hausdorff gäller att $x_n \rightarrow x$ och $x_n \rightarrow y$ medför att $x = y$. Ge ett exempel som visar att detta inte nödvändigtvis är sant om X inte är Hausdorff.
 - (b) Visa att om X är kompakt så har varje följd en hopningspunkt.
 - (c) Visa att om X är kompakt och metriskt så är X *följdkompakt*, dvs varje följd har en konvergent delföljd.
 - (d) Visa att om X är följd-kompakt och metriskt så är X *totalt begränsad*, dvs för varje $\epsilon > 0$ finns ett ändligt antal punkter $x_1, x_2, \dots, x_n$ sådana att $\bigcup_{k=1}^n B(x_k, \epsilon) = X$.
 - (e) Antag att X är följd-kompakt och metriskt. Visa Lebesgues lemma för X , dvs att för varje öppen övertäckning $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ finns $\epsilon > 0$ sådant att det för alla $x \in X$ finns ett $\alpha \in I$ så att $B(x, \epsilon) \subseteq U_\alpha$. Använd sedan detta till att visa att X är kompakt.
3. (8p) Låt X vara ett topologiskt rum och Y ett delrum av X . Låt A vara en delmängd av Y och skriv A_X° respektive A_Y° för det inre av A sedd som delmängd av X respektive Y . Visa att $A_X^\circ \subseteq A_Y^\circ$ och ge ett exempel som visar att de två kan vara olika.

4. (10p) Ett topologiskt rum X säga vara *sekundärt uppräkneligt* om det finns en uppräknelig bas för topologin. Man säger att X är *separabelt* om det finns en uppräknelig tät delmängd. Visa att ett sekundärt uppräkneligt rum alltid är separabelt. Visa också att ett separabelt metriskt rum är sekundärt uppräkneligt. Ge ett exempel på ett rum som är separabelt men inte sekundärt uppräkneligt.
5. (10p)
 - (a) Ange en gruppverkan av $\mathbb{Z}$ på $\mathbb{E}^1 \times [0, 1]$ sådan att banrummet $\mathbb{E}^1 \times [0, 1]/\mathbb{Z}$ blir ett Möbiusband. Vad säger detta om fundamentalgruppen för Möbiusbandet?
 - (b) Ange en gruppverkan av $\mathbb{Z}_2$ (dvs heltalen modulo 2) på torusen sådan att banrummet blir en cylinder. Vad säger detta om fundamentalgruppen för cylindern?
6. (8p) Låt $SO(2)$ verka på $\mathbb{E}^2$ på vanligt sätt. Vilket blir banrummet? Visa att banrummet är homeomorft med ett annat "enkel beskrivet" rum.

Telefonvakt under tentamen är Iulia Pop som kan sökas på telefon 0740-350646.

Efter skrivtidens slut finns förslag till lösningar på kursens hemsida. Skrivningen beräknas vara färdigrättad fredagen den 13 juni. Vardagar efter kl 14.00 kan man få reda på resultat på telefon 7723509.

Lycka till! /Johan Jonasson

Lösningar

1. (a) Homeomorfa. En homeomorfism från $(0, 1)$ till $\mathbb{E}^1$ ges till exempel av $f(x) = \tan \pi(x - \frac{1}{2})$. Således har de två rummen även isomorfa fundamentalgrupper.
- (b) Ej homeomorfa; torusen har fundamentalgrupp $\mathbb{Z}^2$ medan sfären har trivial fundamentalgrupp.
- (c) Homeomorfa via stereografisk projektion.
- (d) De båda rummen är av samma homotopityp och har således isomorfa fundamentalgrupper. De är dock inte homeomorfa; cirkeln är kompakt till skillnad från $\mathbb{E}^2 \setminus \{0\}$.

- (e) Av samma skäl som i (d) har rummen isomorfa fundamentalgrupper, men de är inte homeomorfa; Möbiusbandet har till skillnad från cylindern sammanhängande rand.

2. (a) Om X är Hausdorff och x och y är olika finns det öppna och disjunkta mängder $U \ni x$ och $V \ni y$. Eftersom alla utom ändligt många x_n ligger i U enligt definitionen av att $x_n \rightarrow x$ kan högst ändligt många x_n ligga i V , en motsägelse av att $x_n \rightarrow y$.

Ett exempel: Låt X vara den reella linjen med toplogin $\{(-\infty, x) : x \in [-\infty, \infty]\}$. Här gäller att $x_n \rightarrow x$ medför att $x_n \rightarrow y$ för alla $y \geq x$.

- (b) Antingen innehåller $\{x_n\}$ endast ändligt många distinkta punkter, varför något element upprepas oändligt många gånger, eller så innehåller $\{x_n\}$ oändligt många distinkta punkter och definierar alltså en oändlig mängd A . Om A skulle sakna hopningspunkt skulle det för varje $x \in X$ finnas en öppen omgivning $U \ni x$ som innehåller högst en punkt i A . Familjen $\{U_x : x \in X\}$ utgör en öppen övertäckning av X och kan tack vare att X är kompakt reduceras till en ändlig. Men denna ändliga delövertäckning skulle då bara innehålla ändligt många punkter i A , en motsägelse.
- (c) I fallet där $\{x_n\}$ innehåller oändligt ofta upprepade punkter blir varje sådan trivialt en konvergenspunkt för en delföljd, så antag att $\{x_n\}$ ej innehåller någon oändligt ofta upprepad punkt. Då finns det enligt (b) en hopningspunkt x till följd. Detta betyder att det för varje positivt heltal k finns ett första index n_k sådant att $x_{n_k} \in B(x, 1/k)$. De distinkta punkterna i $\{x_{n_k}, k = 1, 2, 3, \dots\}$ utgör en delföljd som konvergerar till x .
- (d) Välj en godtycklig punkt i X som x_1 . Om $B(x_1, \epsilon) = X$ är saken klar, i annat fall välj en punkt $x_2 \in X \setminus B(x_1, \epsilon)$. Om $B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon) = X$ är saken klar, i annat fall välj en punkt $x_3 \in X - (B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon))$. Fortsätt på detta sätt ända tills hela X är täckt av ϵ -bollar; detta kommer att ske ty annars skulle vi erhålla en följd $\{x_n\}$ som saknar konvergent delföljd, en motsägelse mot (c).
- (e) Kalla en boll $B(x, r)$ stor om det inte finns något U_α som innehåller $B(x, r)$. Låt $a = \inf\{r : \exists x \in X : B(x, r) \text{ stor}\}$. Det gäller att visa att $a > 0$. Antag att $a = 0$. Då finns för varje $n = 1, 2, \dots$ en

stor boll $B(x_n, r_n)$ med $r_n < 1/n$. Bilda en följd $\{y_n\}$ genom att ur varje sådan boll välja ett element y_n . Eftersom X är följdkompakt finns det en konvergent delföljd som konvergerar till något element y . Nu finns det ju något α sådant att $y \in U_\alpha$ varför det finns $s > 0$ sådant att $B(y, s) \subseteq U_\alpha$. Välj nu n så stort att $1/n < s/4$ och sådant att $d(y_n, y) < s/2$. Då gäller att $B(x_n, r_n) \subseteq B(y, s) \subseteq U_\alpha$ vilket motsäger att $B(x_n, r_n)$ är stor.

För att visa att X är kompakt, låt $\{U_\alpha\}$ vara en öppen övertäckning och låt ϵ vara dess Lebesguetal. Enligt (c) kan X övertäckas av ändligt många ϵ -bollar och varje sådan boll är innehållen i någon U_α varför motsvarande U_α :n utgör en ändlig delövertäckning.

3. Per definition är

$$A_X^\circ = \bigcup \{U \subseteq A : U \text{ öppen i } X\}$$

och

$$A_Y^\circ = \bigcup \{U \subseteq A : U \text{ öppen i } Y\}.$$

Eftersom $A \subseteq Y$ är alla U i de två definitionerna också delmängder av Y , vilket per definition av delrumstopologin betyder att U är öppen i Y så fort U är öppen i X vilket ger den önskade inklusionen.

Ett exempel: Låt $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{Q}$ och $A = Y$. Då är det inre av A i X tomt medan det inre av A i Y trivialt är A .

4. Antag att X är sekundärt uppräkneligt och låt $B_1, B_2, B_3, \dots$ utgöra en uppräknelig bas. Bilda mängden A genom att ta ett element x_n ur varje B_n . Då blir A tät ty varje öppen mängd U innesluter ett B_n som i sin tur innehåller elementet x_n i A .

För ett exempel på ett separabelt men icke sekundärt uppräkneligt rum, låt X vara rella linjen försedd med den coändliga topologin, dvs där en mängd är öppen om den antingen är tom eller om dess komplement är ändligt. Då är varje oändlig mängd tät, varför X är separabelt, men för en godtyckliga uppräknelig familj av öppna mängder, $U_1, U_2, \dots$, skriv $U_i = X \setminus A_i$ där A_i är ändlig. Då är $\bigcup_i A_i$ uppräknelig varför det finns ett element $x \in X \setminus (\bigcup_i A_i)$. Den öppna mängden $X \setminus \{x\}$ kan då inte innesluta någon U_i . Alltså är X inte sekundärt uppräkneligt.

5. (a) En sökt gruppverkan ges av

$$n(x, y) = (x + 1, (-1)^n y + (-1)^{n+1}(1 - y)).$$

Eftersom $\mathbb{E}^1 \times [0, 1]$ är enkelsammanhängande och denna verkan är sådan att det för varje (x, y) finns en öppen omgivning U till denna punkt sådan att $n(U) \cap U = \emptyset$ för alla $n \neq 0$ gäller det att fundamentalgruppen för Möbiusbandet blir just $\mathbb{Z}$.

- (b) Bädda till exempel in torusen i $\mathbb{E}^3$ genom att rotera cirkeln $(x - 3)^2 + z^2 = 1$ ett varv runt z -axeln och definiera gruppverkan genom att låta $1(x, y, z) = (x, -y, z)$. Eftersom torusen inte är enkelsammanhängande kan inte detta säga någonting om cylinderns fundamentalgrupp.

6. Gruppen $SO(2)$ består av alla 2×2 ortogonalmatriser med determinant 1, dvs alla matriser som vrider planet kring origo. För $A \in SO(2)$ definieras verkan genom $A(x) = Ax$. Två punkter i planet ligger alltså i samma bana om den ena punkten kan vridas till den andra, dvs om de två punkterna ligger på samma avstånd från origo. Banrummet består följaktligen av alla cirklar centrerade i origo. Skriv B för banrummet och c_r för cirkeln med centrum i origo och radie r . Det gäller att B är homeomorft med $\mathbb{E}_+^1$ och en homeomorfism $f : B \rightarrow \mathbb{E}_+^1$ ges av $f(c_r) = r$; f är trivialt bijektiv och dess invers ges av $g(r) = c_r$. Att dessa är kontinuerliga blir uppenbart om man drar sig till minnes hur identifikationstopologin definieras: En mängd i B är öppen om och endast om den svarar mot en öppen mängd i $\mathbb{E}^2$.