

Tentamen i MAN410 Topologi, 030809, kl. 8.45-13.45. Inga hjälpmedel.

1. (8p) Låt G vara en topologisk grupp och låt A och B vara kompakta delmängder till G . Definiera AB som mängden $\{ab : a \in A, b \in B\}$. Visa att AB är kompakt.
2. (14p) Låt X vara ett topologiskt rum och $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vara en följd i X . Man säger att följderna är konvergent om det finns ett element $x \in X$ sådant att för varje öppen omgivning U till x finns ett n_0 sådant att $n > n_0$ medför att $x_n \in U$. Om detta gäller skriver man $x_n \rightarrow x$.
 - (a) Visa att om X är Hausdorff gäller att $x_n \rightarrow x$ och $x_n \rightarrow y$ medför att $x = y$. Ge ett exempel som visar att detta inte nödvändigtvis är sant om X inte är Hausdorff.
 - (b) Visa att om X är kompakt så har varje följd en hopningspunkt.
 - (c) Visa att om X är kompakt och metriskt så är X *följdkompakt*, dvs varje följd har en konvergent delföljd.
 - (d) Visa att om X är följd-kompakt och metriskt så är X *totalt begränsad*, dvs för varje $\epsilon > 0$ finns ett ändligt antal punkter $x_1, x_2, \dots, x_n$ sådana att $\bigcup_{k=1}^n B(x_k, \epsilon) = X$.
 - (e) Antag att X är följd-kompakt och metriskt. Visa Lebesgues lemma för X , dvs att för varje öppen övertäckning $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ finns $\epsilon > 0$ sådant att det för alla $x \in X$ finns ett $\alpha \in I$ så att $B(x, \epsilon) \subseteq U_\alpha$. Använd sedan detta till att visa att X är kompakt.
3. (10p) En delmängd A till ett topologiskt rum X sägs vara *ingenstans tät* om $\bar{A}^\circ = \emptyset$.
 - (a) Visa att A är ingenstans tät om och endast om varje öppen icke-tom mängd har en öppen icke-tom delmängd som ej skär A .
 - (b) Visa att för en sluten mängd A gäller att A är ingenstans tät om och endast om A^c är tät. Gäller detta även om A ej är sluten?
 - (c) Visa att om A är sluten gäller att ∂A är ingenstans tät. Gäller detta om A ej är sluten?
4. (8p) Låt $SO(2)$ verka på $\mathbb{E}^2$ på vanligt sätt. Vilket blir banrummet? Visa att banrummet är homeomorft med ett annat "enkel beskrivet" rum.

5. (10p) Låt T vara ett trinärt träd, dvs en oändlig graf utan cykler där varje nod har precis fyra grannar. Gör T (inklusive kanterna) till ett enkelsammanhängande topologiskt rum genom att införa en metrik som ges av att tänka sig att alla kanter har längden 1 och låta $d(x, y)$ vara längden av den unika kortaste vägen mellan x och y . Din uppgift är att definiera en gruppverkan av den fria gruppen med två generatorer på T sådan att banrummet blir homeomorft med två cirklar med en gemensam punkt och att argumentera för att detta bevisar att detta banrum har just den fria gruppen med två generatorer som fundamentalgrupp.

Telefonvakt under tentamen är Yosief Wondmagegne som kan sökas på telefon 0740-350646.

Efter skrivtidens slut finns förslag till lösningar på kursens hemsida. Skrivningen beräknas vara färdigrättad fredagen den 13 juni. Vardagar efter kl 14.00 kan man få reda på resultat på telefon 7723509.

Lycka till! /Johan Jonasson

Lösningar

1. Per definition av topologisk grupp är produktoperationen, dvs funktionen $f(x, y) = xy$, en kontinuerlig avbildning från $G \times G$ till G . Nu är ju $f(A \times B) = AB$. Eftersom A och B är kompakta är $A \times B$ kompakt och eftersom den kontinuerliga bilden av en kompakt mängd är kompakt gäller att AB är kompakt.
2. (a) Om X är Hausdorff och x och y är olika finns det öppna och disjunkta mängder $U \ni x$ och $V \ni y$. Eftersom alla utom ändligt många x_n ligger i U enligt definitionen av att $x_n \rightarrow x$ kan högst ändligt många x_n ligga i V , en motsägelse av att $x_n \rightarrow y$.
Ett exempel: Låt X vara den reella linjen med topologi $\{(-\infty, x) : x \in [-\infty, \infty]\}$. Här gäller att $x_n \rightarrow x$ medför att $x_n \rightarrow y$ för alla $y \geq x$.
- (b) Antingen innehåller $\{x_n\}$ endast ändligt många distinkta punkter, varför något element upprepas oändligt många gånger, eller så innehåller $\{x_n\}$ oändligt många distinkta punkter och definierar alltså en oändlig mängd A . Om A skulle sakna hopningspunkt skulle det för varje $x \in X$ finnas en öppen omgivning $U \ni x$ som innehåller högst en punkt i A . Familjen $\{U_x : x \in X\}$ utgör

en öppen övertäckning av X och kan tack vare att X är kompakt reduceras till en ändlig. Men denna ändliga delövertäckning skulle då bara innehålla ändligt många punkter i A , en motsägelse.

- (c) I fallet där $\{x_n\}$ innehåller oändligt ofta upprepade punkter blir varje sådan trivialt en konvergenspunkt för en delföljd, så antag att $\{x_n\}$ ej innehåller någon oändligt ofta upprepad punkt. Då finns det enligt (b) en hopningspunkt x till följd. Detta betyder att det för varje positivt heltal k finns ett första index n_k sådant att $x_{n_k} \in B(x, 1/k)$. De distinkta punkterna i $\{x_{n_k}, k = 1, 2, 3, \dots\}$ utgör en delföljd som konvergerar till x .
- (d) Välj en godtycklig punkt i X som x_1 . Om $B(x_1, \epsilon) = X$ är saken klar, i annat fall välj en punkt $x_2 \in X \setminus B(x_1, \epsilon)$. Om $B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon) = X$ är saken klar, i annat fall välj en punkt $x_3 \in X - (B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon))$. Fortsätt på detta sätt ända tills hela X är täckt av ϵ -bollar; detta kommer att ske ty annars skulle vi erhålla en följd $\{x_n\}$ som saknar konvergent delföljd, en motsägelse mot (c).
- (e) Kalla en boll $B(x, r)$ stor om det inte finns något U_α som innehåller $B(x, r)$. Låt $a = \inf\{r : \exists x \in X : B(x, r) \text{ stor}\}$. Det gäller att visa att $a > 0$. Antag att $a = 0$. Då finns för varje $n = 1, 2, \dots$ en stor boll $B(x_n, r_n)$ med $r_n < 1/n$. Bilda en följd $\{y_n\}$ genom att ur varje sådan boll välja ett element y_n . Eftersom X är följdkompakt finns det en konvergent delföljd som konvergerar till något element y . Nu finns det ju något α sådant att $y \in U_\alpha$ varför det finns $s > 0$ sådant att $B(y, s) \subseteq U_\alpha$. Välj nu n så stort att $1/n < s/4$ och sådant att $d(y_n, y) < s/2$. Då gäller att $B(x_n, r_n) \subseteq B(y, s) \subseteq U_\alpha$ vilket motsäger att $B(x_n, r_n)$ är stor.

För att visa att X är kompakt, låt $\{U_\alpha\}$ vara en öppen övertäckning och låt ϵ vara dess Lebesguetal. Enligt (c) kan X övertäckas av ändligt många ϵ -bollar och varje sådan boll är innehållen i någon U_α varför motsvarande U_α :n utgör en ändlig delövertäckning.

3. (a) Låt A vara ingenstans tät och låt Y vara en icke-tom öppen mängd. Om A skulle skära varje icke-tom öppen delmängd av Y skulle alla punkter i Y vara hopningspunkter till A varför det slutna höljet av A i Y blir just Y . Med andra ord $\bar{A} \supseteq Y$ och eftersom Y är öppen får vi $\bar{A}^\circ \supseteq Y$, en motsägelse. Om å andra sidan A

ej är ingenstans tät finns en öppen icketom mängd $Y \subseteq \bar{A}$ dvs alla punkter i Y är hp till A varför A skär alla icketomma öppna delmängder till Y .

- (b) Att A är sluten betyder att $\bar{A} = A$. Om A är ingenstans tät har vi alltså att $A^\circ = \emptyset$ vilket är ekvivalent med $\overline{A^c} = X$. Slutsatsen är falsk om A ej är sluten: tag $X = \mathbb{R}$ och $A = \mathbb{Q}$. Då är både A och A^c täta.
- (c) Det gäller att $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c} = A \cap \overline{A^c}$. Antag att denna mängd har en icketom öppen delmängd U . Eftersom $U \subseteq A$ gäller $U \cap A^c = \emptyset$ varför $U \cap \overline{A^c} = \emptyset$, en motsägelse. Resultatet är falskt om inte A är öppen enligt samma motexempel som i (b).

4. Gruppen $SO(2)$ består av alla 2×2 ortogonalmatriser med determinant 1, dvs alla matriser som vrider planet kring origo. För $A \in SO(2)$ definieras verkan genom $A(x) = Ax$. Två punkter i planet ligger alltså i samma bana om den ena punkten kan vridas till den andra, dvs om de två punkterna ligger på samma avstånd från origo. Banrummet består följaktligen av alla cirklar centrerade i origo. Skriv B för banrummet och c_r för cirkeln med centrum i origo och radie r . Det gäller att B är homeomorft med $\mathbb{E}_+^1$ och en homeomorfism $f : B \rightarrow \mathbb{E}_+^1$ ges av $f(c_r) = r$; f är trivialt bijektiv och dess invers ges av $g(r) = c_r$. Att dessa är kontinuerliga blir uppenbart om man drar sig till minnes hur identifikationstopologin definieras: En mängd i B är öppen om och endast om den svarar mot en öppen mängd i $\mathbb{E}^2$.
5. Definiera en godtyckligt vald nod i trädet som rot och rita trädet i planet med roten i origo och med alla kanter parallella med x - eller y -axeln så att det vid varje nod bildas ett kors. (Kanterna blir kortare och kortare ju längre man kommer från origo för att trädet ska få plats.) Kalla grannoden till origo rakt upp för a och grannen rakt ner för a^{-1} , grannen till höger för b och den till vänster för b^{-1} . Definiera gruppverkan av $\langle a, b \rangle$ på trädet genom att från punkten x på trädet låta $a(x)$ vara den punkt man kommer till om man går först från x till roten, därefter till a , varpå man translaterar trädet så att a hamnar i origo och sedan går den väg som skulle lett tillbaka från roten till x fast nu från den "nya" roten. Definiera $a^{-1}(x)$, $b(x)$ och $b^{-1}(x)$. Detta specificerar en gruppverkan var banrum blir två cirklar som sitter ihop i en punkt och eftersom trädet är enkelsammanhängande och verkan av alla

icketriviala element flyttar varje punkt gäller att fundamentalgruppen är just $\langle a, b \rangle$.