

Tentamen i MAN410 Topologi, 040601, kl. 8.45-13.45. Inga hjälpmedel.

1. (8p) (Cantors skärningssats.) Antag att X är ett kompakt metriskt rum med metriken d . För en mängd $A \subseteq X$, låt $d(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$. Antag att $A_1, A_2, A_3, \dots$ är en avtagande följd av slutna mängder sådana att $d(A_n) \downarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Visa att $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ innehåller exakt en punkt.
2. (8p) Ett topologiskt rum kallas för ett T_1 -rum om det för alla $x, y \in X$ gäller att det finns öppna omgivningar U och V till x respektive y sådana att $y \notin U$ och $x \notin V$.
 - (a) Visa att varje Hausdorffrum är ett T_1 -rum.
 - (b) Visa att X är ett T_1 -rum om och endast om $\{x\}$ är sluten för alla $x \in X$.
 - (c) Ge ett exempel på ett topologiskt rum som är T_1 men inte Hausdorff.
 - (d) Ge ett exempel på ett topologiskt rum som inte är T_1 , men som ändå är T_0 , dvs för alla par av distinkta punkter har minst en av dem en öppen omgivning som inte innehåller den andra.
3. (10p) Låt X och Y vara topologiska rum och låt $f : X \rightarrow Y$ vara en kontinuerlig funktion.
 - (a) Antag att $A \subseteq X$. Visa att $f|_A : A \rightarrow Y$ är kontinuerlig.
 - (b) Visa att $f : X \rightarrow f(X)$ är kontinuerlig.
 - (c) Antag att f är en homeomorfi och att $A \subseteq X$. Visa att $f|_A : A \rightarrow f(A)$ är en homeomorfi.
 - (d) Låt $A = \mathbb{Z}$ och $B = \{0, 1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, \dots\}$. Visa att $\mathbb{E}^1 \setminus A$ och $\mathbb{E}^1 \setminus B$ är homeomorfa, men att A och B inte är homeomorfa.
4. (8p) Definiera följande mängder i $\mathbb{E}^2$: $A = \{x : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$, $L_1 = \{(x_1, 0) : -3 \leq x_1 \leq -2\}$, $L_2 = \{(x_1, 0) : -1 \leq x_1 \leq 0\}$, $L_3 = \{(x_1, 0) : 2 \leq x_1 \leq 3\}$. Visa att $A \cup L_1 \cup L_3$ och $A \cup L_2 \cup L_3$ inte är homeomorfa.
5. (6p) Låt G vara en graf med nodmängd V . En bijektiv funktion $f : V \rightarrow V$ kallas för en *automorfi* om det gäller för alla $x, y \in V$ att x och y är grannar i G om och endast om $f(x)$ och $f(y)$ är grannar i G .

- (a) Definiera $\text{Aut}(G)$ som mängden av alla automorfier på V . Visa att $\text{Aut}(G)$ är en grupp.

Man säger att grafen G är *transitiv* om verkan av $\text{Aut}(G)$ på V är transitiv.

Låt nu H vara en grupp och antag att S är en ändlig delmängd av H sådan att $S = S^{-1}$ och $H = \langle S \rangle$. Konstruera en graf G genom att låta H vara dess nodmängd och låta $x, y \in H$ vara grannar om det finns ett element $s \in S$ sådant att $x = ys$. (G kallas för en *Cayleygraf* till H .)

- (b) Visa att G är transitiv.
(c) Ange en delgrupp till $\text{Aut}(G)$ sådan att stabilisatorn till varje nod är trivial.

6. (10p) (En del av klassificeringssatsen för ytor.) Betrakta följande fyra ytor: (a) sfären, (b) sfären med ett hål ersatt med ett Möbiusband, (c) sfären med två hål ersatta med Möbiusband, (d) sfären med ett handtag (dvs torusen). Ange dessa ytors fundamentalgrupper (och dra härav slutsatsen att de alla är ickehomeomorfa.) Tips: Ytan (b) är homeomorf med rummet man får genom att identifiera antipoda punkter på sfären.

Telefonvakt under tentamen är Anna Nyström som kan sökas på telefon 076-2186654.

Efter skrivtidens slut finns förslag till lösningar på kursens hemsida. Skrivningen beräknas vara färdigreddad fredagen den 12 juni. Vardagar efter kl 14.00 kan man få reda på resultat på telefon 7723509.

Lycka till! /Johan Jonasson

Lösningar

1. På grund av att $d(A_n) \downarrow 0$ är det uppenbart att snittet av alla A_n :na inte kan innehålla mer än en punkt, så det räcker att visa att snittet inte är tomt.

Välj nu, för varje n , en punkt $x_n \in A_n$. Eftersom X är kompakt har varje delföljd till följderna $\{x_n\}$ en konvergent delföljd och eftersom

$d(A_n) \downarrow 0$ gäller att varje konvergent delföljd måste konvergera mot samma element, x . Således gäller att $x_n \rightarrow x$. (Att $x_n \rightarrow x$ betyder att för alla öppna omgivningar U till x finns ett index n_0 så att $n \geq n_0$ medför att $x_n \in U$. Elementet x är en hopningspunkt till följden eller ett oändligt ofta upprepat element.) Fixera nu n och låt U vara en öppen omgivning till x . Då finns ett index $N \geq n$ sådant att $x_m \in U$ för alla $m \geq N$, speciellt $x_N \in U$. Med andra ord skär U mängden A_N och därmed också A_n . Detta gäller för alla omgivningar U så x är en hopningspunkt till A_n och eftersom A_n är sluten gäller då att $x \in A_n$. Eftersom n var godtyckligt vald fungerar resonemanget för alla n och därmed gäller att $x \in \bigcap_n A_n$.

2. (a) Låt x och y vara två distinkta punkter i ett Hausdorffrum. Per definition av Hausdorffegenskapen finns *disjunkta* öppna omgivningar U och V till x respektive y , varför $x \notin V$ och $y \notin U$.
- (b) Antag först att X är T_1 , tag $x \in X$ och $y \in \{x\}^c$. Per definition av T_1 -egenskapen finns en öppen omgivning V till y sådan att $x \notin V$, dvs $V \subseteq \{x\}^c$. Detta visar att $\{x\}^c$ är öppen och därmed att $\{x\}$ är sluten. Om å andra sidan alla enpunktsmängder är slutna och $x \neq y$ är $\{y\}^c$ respektive $\{x\}^c$ öppna omgivningar till x respektive y som bekräftar T_1 -egenskapen.
- (c) Låt X vara vilken oändlig mängd som helst med den köndliga topologin.
- (d) Låt X vara den reella linjen försedd med topologin bestående av $\emptyset$, X och alla mängder av typen (x, ∞) , $x \in \mathbb{R}$.
3. (a) Låt U vara öppen i Y . Då är $(f|A)^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U)$ som är öppen i A .
- (b) Låt U vara öppen i $f(X)$, dvs $U = V \cap f(X)$ där V är öppen i Y . Då är $f^{-1}(U) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V)$ som är öppen.
- (c) Eftersom $f|A$ uppenbarligen är bijektiv gäller det att kolla att $f|A$ och $(f|A)^{-1}$ är kontinuerliga. Men enligt (a) är $f|A : A \rightarrow Y$ kontinuerlig så enligt (b) är $f|A : A \rightarrow f(A)$ kontinuerlig. Ett helt analogt resonemang bekräftar att f^{-1} är kontinuerlig.
- (d) Funktionen $f(x) = 1/x$ är en homeomorfi från $\mathbb{E}^1 \setminus \{0\}$ till sig självt, varför $f|(\mathbb{E}^1 \setminus A) : \mathbb{E}^1 \setminus A \rightarrow \mathbb{E}^1 \setminus B$ är en homeomorfi enligt

(c). Att A och B inte är homeomorfa följer av att B till skillnad från A är kompakt.

4. Först visar vi att en homeomorfi $h : A \cup L_1 \cup L_3 \rightarrow A \cup L_2 \cup L_3$ måste avblida A på A . Detta följer av att om a är en punkt i $A \setminus (L_1 \cup L_3)$ som avbildas på ett linjesegment, finns en boll centrerad i a vars snitt med A är en skiva eller homeomorft med en halvskiva och sådan att restriktionen av h till detta område är en homeomorfi mellan området och ett linjesegment. Men om man plockar bort en inre punkt från linjesegmentet och motsvarande punkt i området får man då en homeomorfi från ett sammanhängande rum till ett icke sammanhängande rum, en motsägelse.

Således är restriktionen av h till A en homeomorfi från A till A och som sådan måste h avblida A 's rand på sig själv. Utan att inskränka allmängiltigheten kan vi anta att h avbildar den inre cirkeln, C_1 , på sig själv och den yttre cirkeln, C_2 , på sig själv. Men då gäller ju att $h(L_1 \cup C_2 \cup L_3) = L_2 \cup C_2 \cup L_3$, dvs h avbildar en sammanhängande mängd på en icke sammanhängande mängd, vilket motsäger att h är en homeomorfi.

5. Gruppoperationen är sammansättning och 1_V är enhetselement. Det är uppenbart att sammansättningen av två automorfier är en automorfi och eftersom f är bijektiv existerar f^{-1} , som också är en automorfi, och således är invers även i gruppmening.

Att Cayleygrafens G är transitiv följer av att vänstermultiplikation med ett godtyckligt men fixt element $u \in H$ utgör en automorfi, ty $x = ys$ om och endast om $ux = uys$, och x avbildas på y via vänstermultiplikation med yx^{-1} . Om man betraktar delgruppen som fås just via vänstermultiplikation med element i H finner man att det enda element som avbildar x på sig självt är e .

6. Sfären har trivial fundamentalgrupp; för ett bevis observerar man att sfären kan skrivas som en union av två öppna enkelsammanhängande mängder vars snitt är bågvis sammanhängande.

Sfären med ett handtag, dvs torusen, är homeomorf med $S^1 \times S^1$ och har därmed fundamentalgrupp $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (Alternativt: Torusen uppstår som banrum till verkan av $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ på $\mathbb{E}^2$ given av $(m, n)(x, y) = (x+m, y+n)$. Eftersom $\mathbb{E}^2$ är esh och varje icketrivialt flyttar på en given punkt en

sträcka som är minst 1, blir fundamentalgruppen för banrummet just $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.)

Sfären med två Möbiusband är homeomorf med Kleinflaskan och uppstår som banrum till verkan av gruppen $H = \langle t, u : tut = u \rangle$ på $\mathbb{E}^2$ given av $t(x, y) = (x + 1, y)$ och $u(x, y) = (1 - x, y + 1)$. Fundamentalgruppen är alltså H (som i sin tur är isomorf med $\langle a, b : a^2 = b^2 \rangle$).

Sfären med ett Möbiusband uppstår enligt uppgift som banrum till verkan av $\mathbb{Z}_2$ på S^2 given av $1(x) = -x$. Eftersom sfären är enkelsammanhängande är fundamentalgruppen just $\mathbb{Z}_2$. (Detta är intuitivt klart: En sluten väg som går ett jämnt antal varv runt Möbiusbandet är homotop med en slinga som följer bandets randcirkel ett helt antal varv. Denna slinga kan föras ut på "sfärdelen" av ytan och där kontraheras till en enda punkt.)