

Tentamen i MAN410 Topologi, 040807, kl. 8.45-13.45. Inga hjälpmedel.

1. (8p) Låt X vara ett topologiskt rum och definera $f : X \rightarrow X \times X$ genom att sätta $f(x) = (x, x)$. Visa att f är kontinuerlig och att X är Hausdorff om och endast om $f(X)$ är slutna.
2. (8p) Låt $f : \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^1$ vara kontinuerlig. Visa att mängderna $\{x : f(x) = x\}$ och $\{x : f(x) = 0\}$ är slutna.
3. (8p) Antag att X och Y är två homeomorfa lokalkompakta Hausdorffrum. Visa att även deras enpunktskompaktifieringar är homeomorfa. Ge också exempel på två lokalkompakta Hausdorffrum som är icke-homeomorfa men vars enpunktskompaktifieringar ändå är homeomorfa.
4. (8p) Definiera följande mängder i $\mathbb{E}^2$: $A = \{x : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$, $L_1 = \{(x_1, 0) : -3 \leq x_1 \leq -2\}$, $L_2 = \{(x_1, 0) : -1 \leq x_1 \leq 0\}$, $L_3 = \{(x_1, 0) : 2 \leq x_1 \leq 3\}$. Visa att $A \cup L_1 \cup L_3$ och $A \cup L_2 \cup L_3$ inte är homeomorfa.
5. (8p) Låt X vara ett kompakt Hausdorffrum och en grupp och antag att avbildningen $(x, y) \rightarrow xy$ är kontinuerlig. Visa att X är en topologisk grupp. Tips: Betrakta avbildningen $(x, y) \rightarrow (xy, y)$ från $X \times X$ till $X \times X$.
6. (10p) Visa att följande par av topologiska rum är ickehomeomorfa:
 - (a) Enhetsskivan och enhetsskivan minus enhetscirkeln (i $\mathbb{E}^2$).
 - (b) Möbiusbandet och cylindern.
 - (c) Enhetscirkeln och annuluset $\{x \in \mathbb{E}^2 : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$.
 - (d) $\mathbb{E}^2$ och $\mathbb{E}^3$.
 - (e) Enhetscirkeln och intervallet $[0, 1]$.

Telefonvakt under tentamen är ?? som kan sökas på telefon 076-2186654.

Efter skrivtidens slut finns förslag till lösningar på kursens hemsida. Skrivningen beräknas vara färdiggrättad fredagen den 20 augusti. Vardagar efter kl 14.00 kan man få reda på resultat på telefon 7723509.

Lycka till! /Johan Jonasson

Lösningar

1. För att visa kontinuitet räcker det att visa att $f^{-1}(U \times V)$ är öppen då U och V är öppna i X , och

$$f^{-1}(U \times V) = f^{-1}((U \times Y) \cap (X \times V)) = U \cap V$$

som är öppen.

Antag sedan att diagonalen $f(X)$ är sluten och att x och y är två distinkta punkter i X . Eftersom $f(X)$ är sluten finns det en omgivning W till (x, y) i $X \times X$ som inte skär $f(X)$. Per definition av produkttopologin finns det då öppna omgivningar U och V till x respektive y sådana att $U \times V \subseteq W$. Eftersom W ej skär $f(X)$ måste U och V vara disjunkta och därmed är det visat att X är Hausdorff.

För att visa det omvända, antag att X är Hausdorff och antag att x och y är två distinkta punkter i X . Det gäller att visa att (x, y) inte är en hopningspunkt till $f(X)$. Eftersom X är Hausdorff finns det disjunkta öppna omgivningar U och V till x respektive U . Där är $U \times V$ en öppen omgivning till (x, y) som ej skär $f(X)$. Saken är klar.

2. Mängden $\{x : f(x) = 0\}$ kan skrivas som $f^{-1}(\{0\})$, dvs inversa bilden av en sluten mängd, och är därmed sluten tack vare f 's kontinuitet.

Funktionen g given av $g(x) = f(x) - x$ är differensen av två kontinuerliga funktioner och därmed kontinuerlig. Eftersom $\{x : f(x) = x\} = \{x : g(x) = 0\}$ följer slutenheten av vad som nyss visats.

3. Låt X och Y vara två lokalkompakta Hausdorffrum och $f : X \rightarrow Y$ en homeomorfi. Betrakta nu de två rummens enpunktskompaktifieringar X' och Y' och kalla den "extra" punkten i vardera rum för p respektive q . Utvidga f genom att låta $f(p) = q$. För att visa att f är en homeomorfi räcker det att visa att $f(U)$ och $f^{-1}(V)$ är öppna i Y' respektive X' då U och V är öppna omgivningar till p respektive q . Men U kan per definition av topologin på X' skrivas som $\{p\} \cup (X \setminus K)$ där K är kompakt. Alltså får vi $f(U) = \{q\} \cup (Y \setminus f(K))$ som är öppen. Analogt med den inversa bilden.
4. Först visar vi att en homeomorfi $h : A \cup L_1 \cup L_3 \rightarrow A \cup L_2 \cup L_3$ måste avblida A på A . Detta följer av att om a är en punkt i $A \setminus (L_1 \cup L_3)$ som avbildas på ett linjesegment, finns en boll centrerad i a vars snitt med A är en skiva eller homeomorft med en halvskiva och sådan att

restriktionen av h till detta område är en homeomorfi mellan området och ett linjesegment. Men om man plockar bort en inre punkt från linjesegmentet och motsvarande punkt i området får man då en homeomorfi från ett sammanhängande rum till ett icke sammanhängande rum, en motsägelse.

Således är restriktionen av h till A en homeomorfi från A till A och som sådan måste h avblida A 's rand på sig själv. Utan att inskränka allmängiltigheten kan vi anta att h avbildar den inre cirkeln, C_1 , på sig själv och den yttre cirkeln, C_2 , på sig själv. Men då gäller ju att $h(L_1 \cup C_2 \cup L_3) = L_2 \cup C_2 \cup L_3$, dvs h avbildar en sammanhängande mängd på en icke sammanhängande mängd, vilket motsäger att h är en homeomorfi.

5. Det gäller att visa att invertering utgör en kontinuerlig avbildning. Avbildningen $(x, y) \rightarrow (xy, y)$ är kontinuerlig och bijektiv. Eftersom $X \times X$ är kompakt Hausdorff är dessutom avbildningen en homeomorfi. Speciellt gäller att inversen är kontinuerlig. Men inversen avbildar (x, y) på (xy^{-1}, y) . Koordinatavbildningen $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$ blir då automatiskt kontinuerlig och för varje fixt x blir avbildningen $y \rightarrow xy^{-1}$ då också kontinuerlig. Fixera nu bara x till e och saken är klar.
6. (a) Enhetsskivan är kompakt till skillnad från vad den är utan sin randcirkel.
- (b) De två rummen har ickehomeomorfa ränder.
- (c) Om f vore en homeomorfi och x och y är två distinkta punkter på enhetscirkeln C skulle restriktionen av f till $C \setminus \{x, y\}$ vara en homeomorfi mellan ett icke-sammanhängande rum och ett sammanhängande rum, en motsägelse.
- (d) Med en punkt borttagen får $\mathbb{E}^2$ fundamentalgrupp som C medan bortplockandet av motsvarande punkt i $\mathbb{E}^3$ resulterar i ett enkelsammanhängande rum.
- (e) Olika fundamentalgrupper.