INLÄMNINGSUPPGIFTER 4

1. Visa att de komplexa talen inte kan ordnas, d v s att $\mathbb{C}$ inte är en ordnad kropp. Ledning: visa t ex att både $i < 0$ och $i > 0$ leder till motsägelser.

2. Är mängden av alla rationella nollföljder uppräknelig eller ej?

3. Låt K vara en ordnad kropp och betrakta kroppen L av alla formella Laurentserier

$$p = a_n T^n + a_{n+1} T^{n+1} + a_{n+2} T^{n+2} + \dots ,$$

där $a_{n+i} \in K$ och $n \in \mathbb{Z}$ (observera att varje formell serie $1 + a_1 T + a_2 T^2 + \dots$ har en invers). Om $p \neq 0$ finns det ett minsta n med $a_n \neq 0$, och $n = n(p)$ kallas ordningen av p (om $p = 0$ sätter vi $n(p) = -\infty$). Vi kallar p positiv om $n(p) > -\infty$ (d v s $p \neq 0$) och $a_{n(p)} > 0$.
Visa att L är en ordnad kropp.
Visa att $\lim_{k\to\infty} T^k = 0$.
Visa att ordningen på L är inte arkimedisk: för alla $k \in \mathbb{N}$ gäller $k < T^{-1}$ (observera att $k = k \cdot 1 = k \cdot T^0$).
Låt (p_k) vara en Cauchyföljd i L, så $p_k = \sum a^{(k)}_{n(k)+i} T^{n(k)+i}$. Visa att det finns för varje $l \in \mathbb{Z}$ ett $N \in \mathbb{N}$ sådant att $a^{(k)}_j = a^{(m)}_j$ för alla $k, m \geq N$ och alla $j \leq l$. Visa att följden (p_k) konvergerar.