MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i **Matematisk logik**, 5p
1996-10-25, kl 8.45-13.45.
Inga hjälpmedel.

1. **a)** Ge en satslogisk formel i disjunktiv normalform som är ekvivalent med $\neg((p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \to p)$, där $n > 0$. (1,5p)

   b) Ge ett fullständigt konnektiv och en satslogisk formel som endast innehåller detta konnektiv och som är ekvivalent med $\bot$. (1,5p)

2. **a)** Ge en härledning i naturlig deduktion av $((p \to q) \to p) \to p$. (1p)

   c) Ge en Kripkemodell i vilken formeln $((p \to q) \to p) \to p$ är falsk. Motivera ordentligt! (2p)

3. Låt p vara en godtycklig satssymbol, ψ en godtycklig satslogisk formel och Γ en mängd av satslogiska formler.

   a) Definiera $\varphi[\psi/p]$ genom rekursion över den satslogiska formeln φ. (1p)

   b) Visa att för alla satslogiska formeler φ och ψ gäller att om $\Gamma \vdash \varphi$ så $\Gamma[\psi/p] \vdash \varphi[\psi/p]$. $\Gamma[\psi/p]$ definieras som $\{\sigma[\psi/p] \mid \sigma \in \Gamma\}$. Du behöver endast behandla fallet då det enda konnektivet är $\to$ och de enda introduktion- och eliminationsreglerna är de för $\to$. (2p)

4. **a)** Ge domänen för modellen till Peanos axiom som fås i beviset av fullständighetassatsen. (1,5p)

   b) Visa att varje konsistent mängd av predikatlogiska formler har en konsistent och fullständig extension. (Att en mängd av formler är fullständig betyder att för varje sluten formel gäller att antingen den eller dess negation kan härledas från mängden.) (2p)

5. **a)** Formulera $\forall$-elimination och visa att restriktionen i regeln är nödvändig. (1,5p)

   b) Ge en härledning i naturlig deduktion av $(\forall x)\neg B(x) \to \neg(\exists x)B(x)$. (1p)

   c) Låt A vara en ettställig predikatsymbol och B en nollställig predikatsymbol. En av de följande formlerna är en predikatlogisk sanning; ge en härledning i naturlig deduktion av den. Den andra är inte en predikatlogisk sanning; ge en modell för dess negation. (2p)

$$(\exists x)(A(x) \to B) \to ((\exists x)A(x) \to B)$$

$$(\forall x)(A(x) \to B) \to ((\exists x)A(x) \to B)$$

6. Härled nedanstående formler i naturlig deduktion utan RAA. Använd härledningarna för att konstruera bevistermer enligt Curry-Howard tolkningen i typerna som svarar mot formlerna.

   a) $(\phi \wedge (\psi \to \sigma)) \to (\phi \to \psi) \to \sigma)$ (2p)

   b) $\phi \to \neg\neg\phi$ (1p)

7. Låt A vara en tvåställig predikatsymbol och B en ettställig predikatsymbol. Ge en prenexform till $(\forall x)A(x,y) \wedge [(\exists y)(B(y) \to \neg((\exists x)B(x) \leftrightarrow B(y)))]$. (2p)

8. Två tolkningar av ett predikatlogiskt språk säges vara elementärt ekvivalenta om samma slutna formler är sanna i båda tolkningarna. Visa att om Γ är en konsistent mängd av formler så är Γ fullständig om och endast om varje par av modeller till Γ är elementärt ekvivalenta. (3p)