MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i **Matematisk logik**, 5p
1997-10-25, kl 8.45-13.45.
Inga hjälpmedel.

1. **a)** Ge en satsform i disjunktiv normalform som är ekvivalent med
   $\neg(p_1 \to (p_2 \to (\cdots (p_{n-1} \to p_n) \cdots)))$. (1,5p)

   b) Ge en härledning i naturlig deduktion av $(p \vee q) \ \to \ (\neg((\neg p) \wedge (\neg q)))$. (1,5p)

   c) Ge ett fullständigt konnektiv och en satslogisk formel som endast innehåller detta konnektiv och som är ekvivalent med $p \to p$. (1,5p)

2. **a)** Ge en härledning i naturlig deduktion av $(p \to q) \vee p$. (1,5p)

   b) Ge en Kripkemodell i vilken formeln $(p \to q) \vee p$ är falsk. Motivera ordentligt! (2p)

3. Låt A vara en tvåställig predikatsymbol, B och C ettställiga predikatsymboler, c en individkonstant och f en ettställig funktionskonstant. Två av nedanstående formler är predikatlogiska sanningar; ge härledningar i naturlig deduktion av dem. De två andra är inte predikatlogiska sanningar; ge modeller för deras negationer. (4p)

$$(\forall x)A(x, f(x)) \to (\forall x)(\exists y)A(x, y)$$

$$A(c, f(c)) \to (\forall x)(\exists y)A(x, y)$$

$$(\forall x)(C(x) \to B(x)) \to ((\forall x)C(x) \to (\forall x)B(x))$$

$$(\exists x)(C(x) \to B(x)) \to ((\exists x)C(x) \to (\exists x)B(x))$$

4. Låt A vara en tvåställig predikatsymbol och B en ettställig predikatsymbol. Ge en prenexform till $[(\exists y)(B(y) \to \neg(((\exists x)B(x)) \to A(x, y)))] \to (\forall x)A(x, y)$. (2p)

5. Härled $((p \wedge q) \ \to \ r) \ \to \ ((p \ \to \ (q \ \to \ r))$ i naturlig deduktion utan RAA. Använd härledningen för att konstruera en bevisterm enligt Curry-Howard tolkningen i typen som svarar mot $((p \wedge q) \to r) \to ((p \to (q \to r))$. (2p)

6. **a)** Formulera $\forall$-introduktion och visa att restriktionen i regeln är nödvändig. (1p)

   b) Låt P vara en ettställig predikatkonstant och x och y två olika variabler. Visa att $\not\vdash P(x) \leftrightarrow P(y)$. (1p)

7. **a)** Visa att varje konsistent mängd av predikatlogiska formler har en konsistent och fullständig extension. (2p)

   b) Låt Γ vara en konsistent mängd av formler i gruppteorins språk, dvs i ett språk med likhet, en individkonstant e, en ettställig funktionskonstant f och en tvåställig funktionskonstant g. Enligt beviset av fullständighetssatsen har Γ en modell; beskriv domänen till modellen. (2p)

Var god vänd!

8. Definiera en avbildning $\star$ från de satslogiska formlerna in i de satslogiska formlerna rekursivt genom

$$
\begin{aligned}
\bot^\star &= \bot \\
p^\star &= \neg\neg p \\
(\varphi \wedge \psi)^\star &= \varphi^\star \wedge \psi^\star \\
(\varphi \vee \psi)^\star &= (\neg((\neg\varphi^\star) \wedge (\neg\psi^\star))) \\
(\varphi \to \psi)^\star &= \varphi^\star \to \psi^\star
\end{aligned}
$$

där p står för en godtycklig satsvariabel. Visa, att om φ är härledbar i naturlig deduktion från Γ med eventuellt användande av regeln för motsägelsebevis, RAA, så är $\varphi^\star$ härledbar i naturlig deduktion från $\Gamma^\star$ utan RAA. $\Gamma^\star$ fås från Γ genom att ersätta varje formel γ i Γ med $\gamma^\star$. (3p)