MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i **Matematisk logik**, 5p
1999-01-16, kl 8.45-13.45.
Inga hjälpmedel. Telefonvakt: 292457 eller 7721034.

1. **a)** Ge en satsform i disjunktiv normalform som är ekvivalent med $(p \to q) \wedge r$. (1,5p)

   b) Ge ett fullständigt konnektiv och en satslogisk formel som endast innehåller detta konnektiv och som är ekvivalent med $p \to q$. (1,5p)

2. **a)** Ge en härledning i naturlig deduktion av $(q \to p) \vee \neg p$. (Lagen om det uteslutna tredje får användas utan bevis.) (1,5p)

   b) Ge en Kripkemodell i vilken formeln $(q \to p) \vee \neg p$ är falsk. Motivera ordentligt! (2p)

3. Låt P och Q vara ettställiga predikatsymboler och f och g ettställiga funktionskonstanter.

   a) Ge en härledning i naturlig deduktion av $(\exists x)Q(x)$ från antagandena $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$ och $(\exists x)P(x)$. (1,5p)

   b) För varje av nedanstående formler: om den är en predikatlogisk sanning, ge en härledning i naturlig deduktion av den, annars ge en tolkning i vilken den är falsk. (4p)

$$((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)) \to (\forall x)(P(x) \to Q(x))$$

$$(\forall x)((P(f(x)) \vee P(g(x))) \to (\exists x)P(x))$$

$$(\exists x)P(x) \to (\exists x)P(f(x))$$

$$(\exists x)(\neg P(f(x))) \to (\neg(\forall x)P(x))$$

4. Låt P vara en tvåställig predikatsymbol och Q en ettställig predikatsymbol. Ge en prenexform till $((\exists x)Q(x) \to (\forall x)Q(x)) \vee P(x,y)$. (2p)

5. Härled $p \to ((p \to q) \to q)$ i naturlig deduktion utan RAA. Använd härledningen för att konstruera en bevisterm enligt Curry-Howard tolkningen i typen som svarar mot $p \to ((p \to q) \to q)$. (2p)

6. Formulera $\exists$-elimination och visa med exempel att restriktionerna i regeln är nödvändiga. (2p)

7. Låt Γ vara en konsistent mängd av formler i ett predikatlogiskt språk. Enligt beviset av fullständighetssatsen har Γ en modell. Beskriv modellen, givet en maximalt konsistent Henkinextension T_m till Γ; d v s beskriv domänen och hur funktionskonstanter, individkonstanter och predikatsymboler tolkas givet T_m. (2p)

   Var god vänd!

8. Låt Γ vara en mängd av predikatlogiska formler och φ en sluten formel. Visa att om varje ändlig delmängd till Γ har en modell så har antingen varje ändlig delmängd till $\Gamma \cup \{\varphi\}$ en modell eller varje ändlig delmängd till $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ en modell. (3p)

9. Definiera en avbildning $\star$ från mängden av de predikatlogiska formlerna in i mängden av de satslogiska formlerna rekursivt genom

$$\begin{aligned}
\bot^\star &= \bot \\
At^\star &= p \\
(\varphi \Box \psi)^\star &= \varphi^\star \Box \psi^\star \\
((\forall x)\varphi)^\star &= \varphi^\star \\
((\exists x)\varphi)^\star &= \varphi^\star
\end{aligned}$$

   där At står för en godtycklig atomär formel, skild från $\bot$, i det predikatlogiska språket, p står för en godtycklig (fix) satsvariabel och $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$.

   Visa att, om $\Gamma \vdash \varphi$ i predikatlogik, så $\Gamma^\star \vdash \varphi^\star$ i satslogik. $\Gamma^\star$ fås från Γ genom att ersätta varje formel γ i Γ med $\gamma^\star$.

   Ledning. Beviset är genom induktion över längden på härledningen $\Gamma \vdash \varphi$. När det gäller introduktions och eliminationsreglerna, räcker det att du behandlar de för $\rightarrow$ och $\exists$.

   Kommentar. Genom att sätta $\Gamma = \emptyset$ och $\varphi = \bot$ ger det som du skall visa att om predikatlogik är inkonsistent, så är redan satslogik inkonsistent. Detta observerades först av Hilbert och Ackermann, men tro inte att uppgiften är svår för det! (4p)

Tentan beräknas vara färdigrättad den 25 januari. Den kan hämtas i mottagningsrummet kl. 12.30-13.00 varje vardag.