NÅGRA GAMLA TENTAUPPGIFTER I MATEMATISK LOGIK.

1. **a)** Ge en satsform i disjunktiv normalform som är ekvivalent med $p|(p|q)$.

   b) Visa att $\{\wedge, \leftrightarrow\}$ inte är en fullständig mängd av konnektiver.

2. $\exists$-elimination har restriktioner på fria variabler. Formulera dessa restriktioner och visa med exempel att de är nödvändiga.

3. Låt $\mathcal{L}$ vara ett predikatlogiskt språk. Definiera vad som menas med

   a) term i $\mathcal{L}$,

   b) formel i $\mathcal{L}$,

   c) termen t är fri för variabeln x in en formeln φ.

4. **a)** Härled Q från antagandena $(P \to R) \to Q$ och $P \to (\neg R \to R)$ i naturlig deduktion.

   b) Härled $(\exists x)R(x)$ från antagandena $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$, $(\forall x)(P(x) \to R(x))$ och $(\forall x)(Q(x) \to (\exists z)(Q(z) \wedge R(z)))$ i naturlig deduktion.

   c) En av nedanstående formler är en predikatlogisk sanning; ge en härledning i naturlig deduktion av den. Den andra är inte en predikatlogisk sanning; ge en modell för dess negation.

$$(\exists y)((\forall x)A(x,y) \to B(y)) \to (\exists y)B(y)$$

$$((\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \wedge (\forall z)(A(z) \to C(z))) \to (\exists y)C(y)$$

5. **a)** Ge en härledning i naturlig deduktion av $(\neg(p \to q)) \to p$

   b) Visa att $(\neg(p \to q)) \to p$ inte kan härledas i naturlig deuktion utan RAA genom att ge en Kripkemodell i vilken formeln är falsk.

6. Ge en härledning i naturlig deduktion av

$$((\forall x)A(x) \to B) \leftrightarrow (\exists x)(A(x) \to B)$$

   där x är en variabel som inte förekommer fri i B.

7. Låt A vara en satslogisk formel som endast innehåller konnektiverna $\neg$, $\vee$ och $\wedge$. Låt A^* fås från A genom att byta $\wedge$ mot $\vee$, $\vee$ mot $\wedge$ och genom att ersätta varje satssymbol med dess negation. Bevisa att A^* är ekvivalent med $\neg A$.

8. Definiera Gödels formel U och visa att om $\mathcal{N}$ är ω-konsistent så kan varken U eller $\neg U$ härledas i $\mathcal{N}$.