Tillägg om öppna mängder och kontinuitet

Den öppna bollen med radie $\epsilon > 0$ runt $p \in \mathbb{R}^n$ är

$$B_\epsilon(p) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid |p - q| < \epsilon\} .$$

En delmängd $V \subseteq \mathbb{R}^n$ är *öppen* (i $\mathbb{R}^n$) om det till varje $p \in V$ finns ϵ så att $B_\epsilon(p) \subseteq V$.

Exempel. Bollen $B_\epsilon(q)$ är öppen: låt $p \in B_\epsilon(q)$ och sätt $\epsilon' = \epsilon - |p - q|$. Triangelolikheten ger nu att om $r \in B_{\epsilon'}(p)$, så gäller $|r - q| \leq |r - p| + |p - q| < \epsilon$. Detta ger att $B_{\epsilon'}(p) \subseteq B_\epsilon(q)$, så $B_\epsilon(q)$ är öppen. $\square$

Av definitionen följer genast:

Lemma 1. *Om $V_i, i \in I$ är öppna, så är $\bigcup_{i \in I} V_i$ och $V_i \cap V_j$ öppna.*

Lemma 2. *Låt V vara en delmängd till $\mathbb{R}^n$. Följande är ekvivalent:*

1. *V är öppen,*
2. *V är en union av bollar.*

Bevis. Antag 1). Runt varje $p \in V$ finns en boll innehållen i V och V är unionen av dessa.
Antag nu 2). Varje boll är öppen och en union av bollar är därmed öppen enligt Lemma 1. $\square$

Låt nu $S \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en godtycklig mängd. En delmängd $W \subseteq S$ är *öppen* i S om det finns öppen mängd V i $\mathbb{R}^n$, så att $W = V \cap S$. Ett koordinatområde $\mathbf{x}(U)$ på en reguljär yta $S \subset \mathbb{R}^3$ är t.ex öppen i S.
Godtyckliga unioner och ändliga snitt av öppna mängder är öppna.

Lemma 3. *För en delmängd $W \subseteq S$ är följande ekvivalent:*

1. *W är öppen i S,*
2. *För varje $p \in W$ finns ett $\epsilon > 0$, så att $S \cap B_\epsilon(p) \subseteq W$.*

Bevis. Antag 1) och låt $V \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd så att $W = V \cap S$. Till $p \in W$ finns $\epsilon > 0$ så att $B_\epsilon(p) \subseteq V$ och vi får

$$B_\epsilon(p) \cap S \subseteq V \cap S = W .$$

Antag nu 2) och välj för varje $p \in W$ ett $\epsilon(p) > 0$, så att $S \cap B_{\epsilon(p)}(p) \subseteq W$. Låt $V \subseteq R^n$ vara uninonen av alla bollar $B_{\epsilon(p)}(p)$, $p \in W$. Då är V öppen i $\mathbb{R}^n$ och $V \cap S = W$. $\square$

En funktion $f : S_1 \to S_2$, där $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ och $S_2 \subset \mathbb{R}^m$ är *kontinuerlig* i $p \in S_1$ om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$, så att

$$f(B_\delta(p) \cap S_1) \subset B_\epsilon(f(p))(\cap S_2) .$$

En öppen mängd $U \subset S$ som innehåller $p \in S$ kallas för (öppen) *omgivning* av p. Vi får nu en ekvivalent definition av kontinuitet: en funktion $f : S_1 \to S_2$, är *kontinuerlig* i $p \in S_1$ om det till varje omgivning $V \subset S_2$ av $f(p)$ finns en omgivning $U \subset S_1$ av p så att $f(U) \subset V$.

Funktionen f är *kontinuerlig* om den är kontinuerlig i varje $p \in S_1$. Av definitionen följer att en restriktion av en kontinuerlig funktion är kontinuerlig. Det är ingen konst att visa att en sammansättning av två kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.

Lemma 4. *Antag att $f : S_1 \to S_2$. Följande är ekvivalent:*

1. *f är kontinuerlig,*
2. *för varje öppen mängd $W \subseteq S_2$ är $f^{-1}(W)$ öppen i S_1.*

Bevis. Antag 1) och låt $W \subseteq S_2$ vara öppen. Tag $p \in f^{-1}(W)$, d.v.s ett $p \in S_1$, sådant att $f(p) \in W$. Kontinuitet av f ger nu en omgivning U av p med $f(U) \subset W$, så $U \subset f^{-1}(W)$. Av Lemma 3 följer att $f^{-1}(W)$ är öppen.

Antag 2) och att $p \in S_1$. Låt V vara en omgivning av $f(p)$. Då är $U = f^{-1}(V)$ en öppen omgivning av p med $f(U) \subset V$. Detta ger kontinuiteten av f i $p \in S_1$. $\square$

Lemma 5. *Antag att $\mathbf{x} : U \to S$ är en lokal parametrisering av den reguljära ytan $S \subset \mathbb{R}^3$ och att U_0 är en öppen delmängd till U. Då är restriktionen $\mathbf{x}_| : U_0 \to S$ också en lokal parametrisering.*

Bevis. Avbildningen $\mathbf{x}_|$ är restriktion av en kontinuerlig glatt bijektion till en öppen delmängd och har därför samma egenskaper. Eftersom $(\mathbf{x}_|)^{-1} = (\mathbf{x}^{-1})_|$ är den kontinuerlig. Eftersom $d\mathbf{x}_{|q} = d\mathbf{x}_q$, när $q \in U_0$ är den injektiv.

Det återstår att visa att $\mathbf{x}_|(U_0) = \mathbf{x}(U_0)$ är öppen i S. Men $\mathbf{x}(U_0) = (\mathbf{x}^{-1})^{-1}(U_0)$ som är öppen i S enligt lemma 4. $\square$

Kontinuitet av funktioner med godtycklig definitionsmängd.

Do Carmo har en egen definition av vad det betyder att en funktion $f : A \to \mathbb{R}$, där A är en godtycklig delmängd till $\mathbb{R}^n$, är kontinuerlig:

Definition. *Funktionen f är kontinuerlig om det finns en öppen mängd $U \supset A$ och en kontinuerlig funktion $\bar{f} : U \to \mathbb{R}$ som restringerar till f på A, d.v.s $f = \bar{f}_{|A}$.*

Den vanliga (ortodoxa) definitionen är:

Definition. *Funktionen f är kontinuerlig i $p \in A$ om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$, så att*

$$f(B_\delta(p) \cap A) \subset B_\epsilon(f(p)).$$

Man inser genast att om f är kontinuerlig i Do Carmos mening, så är den ortodoxt kontinuerlig. Men följande exempel visar att omvändingen inte gäller i allmänhet:

Exempel. Låt $A \subset \mathbb{R}$ vara $A = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (1/(i+1), 1/i)$ och sätt

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad x = 0 \\ 1/i & \text{om} \quad x \in (1/(i+1), 1/i) \end{cases}$$

Då är f uppenbart (ortodoxt) kontinuerlig i varje punkt i $(1/(i+1), 1/i)$, men också i 0, eftersom $f(x) \to 0$, när $x \to 0+$. Å andra sidan kan f inte utvidgas till en kontinuerlig funktion på en öppen mängd som innehåller A. En sådan skulle nämligen innehålla en omgivning till 0 och därmed alla $(1/(i+1), 1/i)$ när i är tillräckligt stort. Eftersom restriktionen av f till $(1/(i+2), 1/(i+1)) \cup ((1/(i+1), 1/i)$ saknar kontinuerlig utvidgning till $(1/(i+2), 1/i)$ är existensen av $\bar{f}$ i Do Carmos definition utesluten.

I kursen kommer vi framgent att använda den vanliga definitionen av kontinuitet. Det innebär att de två sista raderna i punkt 2 i definitionen av en reguljär yta (definition 1 sidan 52) bör strykas.