MATEMATIK
Göteborgs universitet js

Lösningar till tentamensskrivningen
MAN500, Differentialgeometri, 20040415

1. a) Härled, under lämplig förutsättning, Frenets ekvationer för en båglängdsparametriserad kurva i $\mathbb{R}^3$.
b) Uttryck krökningen och torsionen av en godtycklig reguljär parametriserad kurva α med hjälp av storheterna α', α'' och α'''.

Se kursboken.

2. Visa att den slutna plana kurvan

$$\alpha(t) = ((1-2\cos t)\cos t, (1-2\cos t)\sin t)$$

har en dubbelpunkt i origo. Bestäm kurvans krökning. Hur många vertex har kurvan?

Vi beräknar

$$\alpha'(t) = (-\sin t + 4\cos t\sin t, \cos t + 2\sin^2 t - 2\cos^2 t)$$
$$\alpha''(t) = (-\cos t - 4\sin^2 t + 4\cos^2 t, -\sin t + 8\cos t\sin t)$$

eller $\alpha'(t) = (-\sin t + 2\sin 2t, \cos t - 2\cos 2t)$, $\alpha''(t) = (-\cos t + 4\cos 2t, -\sin t + 4\sin 2t)$.
Funktionen α är periodiskt med period 2π. Vi har $\alpha(t) = (0,0)$ omm $1 - 2\cos t = 0$ (eftersom $\sin t$ och $\cos t$ är inte samtidigt noll), d v s $t = \pm\frac{1}{3}\pi$. Tangenterna är olika, ty $\alpha'(\pm\frac{1}{3}\pi) = (\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2})$.
Vi beräknar k med formeln $\frac{\alpha'\wedge\alpha''}{|\alpha'|^3}$. Vi hittar

$$|\alpha'| = \sqrt{(\sin^2 t - 8\cos t\sin^2 t + 16\cos^t\sin^2 t + \cos^2 t + 4\cos t\sin^2 t - 4\cos^3 t + 4\sin^4 t - 8\sin^2 t\cos^2 t + 4\cos^4 t)} = \sqrt{5 - 4\cos t}$$

och

$$\alpha'\wedge\alpha'' = 9 - 6\cos t$$

efter lika mycket förenkling med formeln $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Så

$$k(t) = \frac{9 - 6\cos t}{(5 - 4\cos t)^{3/2}}\ .$$

För att hitta vertex beräknar vi

$$k'(t) = \frac{12\sin t(2 - \cos t)}{(5 - 4\cos t)^{5/2}}\ ,$$

och $k'(t) = 0$ omm $\sin t = 0$, $t = 0$ eller $t = \pi$. Det finns två vertex.

3. Definiera vad som menas med tangentrummet till en reguljär yta och visa att det är ett linjärt rum av dimension 2.

Se kursboken.

4. Betrakta delmängden $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 1\}$ av $\mathbb{R}^3$.
   a) Visa att S är en reguljär, orienterbar yta.
   b) Bestäm alla navelpunkter på S.
   c) Bestäm normalkrökningen i navelpunkterna.

a) Ytan S är nivåyta till den differentierbara funktionen $f(x, y, z) = 1$, och differentialen $df = (yz, xz, xy)$ är inte noll på S. Enligt sats är nivåytan en orienterbar reguljär yta.

b) Parametrisera $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 1/uv)$. Då är

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, -1/u^2v), \qquad \mathbf{x}_v = (0, 1, -1/uv^2),$$
$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, 2/u^3v), \qquad \mathbf{x}_{uv} = (0, 0, 1/u^2v^2), \qquad \mathbf{x}_{vv} = (0, 0, 2/uv^3).$$

Detta ger $E = 1 + 1/u^4v^2$, $F = 1/u^3v^3$ och $G = 1 + 1/u^2v^4$. Därmed är $EG - F^2 = 1 + 1/u^4v^2 + 1/u^2v^4 = (u^4v^4 + v^2 + u^2)/u^4v^4$. Vi får $e = (u^4v^4 + v^2 + u^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{2v}{u}$, $f = (u^4v^4 + v^2 + u^2)^{-\frac{1}{2}}$ och $g = (u^4v^4 + v^2 + u^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{2u}{v}$. Matrisen till $-dN$ är $\frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ som är lika med

$$(u^4v^4 + v^2 + u^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} u^4v^4 + u^2 & -uv \\ -uv & u^4v^4 + v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2v/u & 1 \\ 1 & 2u/v \end{pmatrix}$$
$$= (u^4v^4 + v^2 + u^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 2u^3v^5 + uv & u^4v^4 - u^2 \\ u^4v^4 - v^2 & 2u^5v^3 + uv \end{pmatrix} .$$

I navelpunkterna är denna matris en multipel av enhetsmatrisen, som ger villkoren $u^4v^4 - u^2 = u^4v^4 - v^2 = 0$ och $2u^3v^5 + uv = 2u^5v^3 + uv$. Så $u^2 = v^2$, $u^6 = 1$, och det finns fyra punkter $(u, v) = (\pm 1, \pm 1)$, som ger på S $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$ och $(1, -1, -1)$.

Alternativt beräknas $K = \frac{3u^4v^4}{(u^4v^4+u^2+v^2)^2}$, $H = \frac{u^3v^5+u^5v^3+uv}{(u^4v^4+u^2+v^2)^{3/2}}$, och villkoret $H = K^2$ för navelpunkter ger efter omformning ekvationen $u^8v^4 - u^6v^6 + u^4v^8 - u^4v^2 - u^2v^4 + 1 = 0$, eller $(u^4v^2 - 1)^2 - (u^4v^2 - 1)(u^2v^4 - 1) + (u^2v^4 - 1)^2 = 0$. Andragradsekvationen $z^2 - zw + w^2 = 0$ har bara komplexa lösningar om $(z, w) \neq (0, 0)$, så vi får $u^4v^2 = 1$, $u^4v^2 = 1$ och $(u, v) = (\pm 1, \pm 1)$.

c) I navelpunkterna är matrisen $uv/\sqrt{3}$ gånger enhetsmatrisen. Normalkrökningen i punkterna $(1, 1, 1)$ och $(-1, -1, 1)$ är alltså $1/\sqrt{3}$ och $-1/\sqrt{3}$ i punkterna $(-1, 1, -1)$ och $(1, -1, -1)$.

5. Visa att konen $S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = a^2(x^2 + y^2),\ z > 0\ \}$, där $a \in \mathbb{R}_+$, är lokalt isometrisk med planet genom att ange en explicit isometri.

Vi parametriserar konen (minus en generator):

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, ar), \qquad r > 0,\ -\pi < \varphi < \pi,$$

med $E = 1 + a^2$, $F = 0$ och $G = r^2$. Samma första fundamentalform fås om vi parametriserar planet med en variant på polarkoordinater: $x = r\sqrt{1 + a^2}\cos\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}$, $y = r\sqrt{1 + a^2}\sin\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}$. Igen $E = 1 + a^2$, $F = 0$ och $G = r^2$. Om vi tar $r > 0$, $-\pi < \varphi < \pi$, får vi en sektor, som är isometrisk med konen minus en generator.

6. Låt S vara spåret av den parametriserade ytan $\mathbf{x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}(u, v) = (u, v^2, uv)$.
   a) Visa att ytan är en regelyta.
   b) Beräkna Gaußkrökningen.
   c) Bestäm centralkurvan (striktionslinjen).
   d) Beräkna de asymptotiska linjerna på S.
   e) Bestäm alla singulära punkter på S. (5p).

a) Vi kan skriva $\mathbf{x}(u,v) = (0,v^2,0) + u(1,0,v)$.

b) Beräkna

$$\mathbf{x}_u = (1,0,v), \qquad \mathbf{x}_v = (0,2v,u),$$
$$\mathbf{x}_{uu} = (0,0,0), \qquad \mathbf{x}_{uv} = (0,0,1), \qquad \mathbf{x}_{vv} = (0,2,0).$$

Detta ger $E = 1+v^2$, $F = uv$ och $G = u^2+4v^2$. Därmed är $EG-F^2 = u^2+4v^2+4v^4$. Vi får $e = 0$, $f = (u^2+4v^2+4v^4)^{-\frac{1}{2}}2v$, $g = -(u^2+4v^2+4v^4)^{-\frac{1}{2}}2u$ och $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = -\frac{4v^2}{(u^2+4v^2+4v^4)^2}$.

c) Vi kan skriva $\mathbf{x}(t,v) = \alpha(v) + tw(v)$ med $|w| = 1$, där $w(v) = \frac{1}{sqrt1+v^2}(1,0,v)$ och $\alpha(v) = (0,v^2,0)$. Nu är $\langle \alpha', w' \rangle = \langle (0,2v,0), (-\frac{v}{(1+v^2)^{3/2}}, 0, \frac{1}{(1+v^2)^{3/2}}) \rangle = 0$. Så $\alpha(v)$ är centralkurvan.

d) Diffekvationen för de asymptotiska linjerna är $e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0$, som ger $-4vu'v' + 2u(v')^2$, med lösningar $v = \mathrm{konstant}$ (regelsystemet på regelytan) eller $uv' = 2vu'$, som ger $v = Cu^2$ och kurvorna (u, C^2u^4, Cu^3).

e) Punkter där parametriseringen ej är reguljär kan bara ligga på centralkurvan, och då måste gälla att $K = 0$. Detta händer bara för $v = 0$. Men genom varje punkt av den positiva y-axeln går två räta linjer: den positiva y-axeln är en dubbelkurva. Den globala parametriseringen är injektiv om $u \neq 0$. Så de singulära punkter är $(0,y,0)$, där $y \geq 0$.