

DEN ISOPERIMETRISKA OLIKHETEN

Problemet, vilken plan sluten kurva av given längd omsluter störst area, var (med sin lösning cirkeln) redan känt i antiken. Det berättas att den feniciska princessan Dido, som grundade Kartago, köpte så mycket land som hon kunde omsluta med en oxhud. Den lät hon sönderskära i fina remsor och därmed inhägna ett stort område. Ett tillfredsställande bevis att cirkeln är lösningen, dröjde emellertid.

På 1800-talet gav Steiner geometriska konstruktioner, som utgående från en kurva, som inte är en cirkel, leder till en kurva med samma omkrets men större omsluten area. Dirichlet, hans kollega i Berlin, försökte förgäves övertyga honom att det inte räcker som bevis, om inte existensen av en lösning visas.

Nuförtiden finns det många bevis. Beviset som följer härstämmer från Hurwitz. Den analytiska delen kan isoleras i följande lemma.

Wirtingers olikhet. *Låt $f(t)$ vara en styckvis glatt, kontinuerlig 2π-periodisk funktion med medelvärde 0, d v s $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Då är*

$$\int_0^{2\pi} (f')^2 dt \geq \int_0^{2\pi} f^2 dt ,$$

med likhet om och endast om $f(t) = a\cos t + b\sin t$, där a och b är konstanter.

Villkoret för likhet kan med hjälp av additionsformlerna för sinus och cosinus formuleras som $f(t) = a\cos(t + b)$, där a och b är (andra) konstanter. Vi använder nu olikheten för att visa den isoperimetriska olikheten.

Sats. *Låt $\boldsymbol{\gamma}$ vara en enkel sluten kurva med längd l, som omsluter en area A. Då är $l^2 \geq 4\pi A$ med likhet om och endast om $\boldsymbol{\gamma}$ är en cirkel.*

Bevis. Vi parametriserar $\boldsymbol{\gamma}$ med konstant hastighet $l/2\pi$. Genom förflyttning får vi anta att $\int_0^{2\pi} x(t)dt = 0$. Nu är $l^2/2\pi = \int_0^{2\pi} \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^2 dt = \int_0^{2\pi} (x')^2 + (y')^2 dt$. För arean har vi med Greens sats formeln $A = \iint_{\mathrm{int}(\boldsymbol{\gamma})} dxdy = \int_0^{2\pi} xy' dt$. Detta ger

$$l^2 - 4\pi A = 2\pi \int_0^{2\pi} (x')^2 + (y')^2 - 2xy' dt = 2\pi \int_0^{2\pi} (x')^2 - x^2 dt + 2\pi \int_0^{2\pi} (y' - x)^2 dt \geq 0 ,$$

där den första integralen är ej negativ enligt Wirtingers olikhet, använd på funktionen $x(t)$, och den andra har en icke-negativ integrand.

Likhet gäller om och endast om $x(t) = a\cos(t+b)$ och $y' = x$, så $y(t) = a\sin(t+b) + c$. Eftersom $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = l/2\pi$ är $a = l/2\pi$, så $\boldsymbol{\gamma}$ är en cirkel med medelpunkt $(0, c)$ och radie $l/2\pi$. $\square$

Det kanske mest naturliga bevis för Wirtingers olikhet använder Fourieranalys. Det finns elementära bevis. Här följer beviset ur [Hardy, Littlewood, Polya. *Inequalities*]. Först analyserar vi beviset för Wirtingers olikhet i den version som Pressley ger: för en glatt funktion $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ med $f(0) = f(\pi) = 0$ gäller $\int_0^\pi f^2 dt \leq \int_0^\pi (f')^2 dt$ med likhet omm $f(t) = a\sin t$.

Vi vill visa att $\int_0^\pi (f')^2 - f^2 dt \geq 0$. Detta gäller om $\int_0^\pi (f')^2 - f^2 dt = \int_0^\pi (f' - f\psi)^2 dt$ för en lämplig function ψ. Vi behöver att $\int_0^\pi 2ff'\psi - f^2(1+\psi^2)\psi dt = 0$. Funktionen $F = f^2\psi$ är en primitiv funktion om $-\psi' = 1 + \psi^2$. Detta är en diffekvation med lösning $\psi(t) = -\tan(t + t_0)$. Funktionen ψ är överallt definierad på intervallen $(0,\pi)$ om vi tar $t_0 = \frac{1}{2}\pi$, så $\psi(t) = \cos t/\sin t$. Vidare är $F(0) = F(\pi) = 0$: för en kontinuerlig deriverbar funktion $f(t)$ med $f(0) = 0$ gäller att $f(t) = t\bar{f}(t)$. Vi har nämligen $f(t) = f(t) - f(0) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} f(xt)\right) dx = t\int_0^1 f'(xt)dx$. På samma sätt behandlas integrationsgränsen $t = \pi$. Vi skriver nu $f(t)/\sin t = g(t)$, eller $f(t) = g(t)\sin t$. Då är $f' - f\psi = g'\sin t$. Således är $\int_0^\pi (f')^2 - f^2 dt = \int_0^\pi (g'\sin t)^2 dt \geq 0$ med likhet omm $g' = 0$, d v s g är konstant.

Bevis för Wirtingers olikhet. Vi kan inte direkt använda argumentet ovan, ty $f/\sin t$ har i allmänhet polställen. Tricket är att först observera att det finns ett tal α, $0 \leq \alpha < \pi$, med $f(\alpha) = f(\alpha + \pi)$, ty funktionen $h(t) = f(t) - f(t+\pi)$ har motsatta tecken för $t = 0$ och $t = \pi$. Låt $f(\alpha) = f(\alpha+\pi) = a$. Nu kan vi använda det tidigare argumentet på funktionen $f(t) - a$ med $\psi(t) = \frac{\cos(t-\alpha)}{\sin(t-\alpha)}$. Vi får

$$\int_0^{2\pi} (f')^2 - (f-a)^2 dt - \int_0^{2\pi} \left(f' - (f-a)\frac{\cos(t-\alpha)}{\sin(t-\alpha)}\right)^2 dt = (f-a)^2 \frac{\cos(t-\alpha)}{\sin(t-\alpha)}\bigg|_0^{2\pi} = 0\ .$$

Detta ger, eftersom $2a\int_0^{2\pi} f dt = 0$, olikheten

$$\int_0^{2\pi} (f')^2 - f^2 dt - 2\pi a^2 \geq 0\ ,$$

med likheten $\int_0^{2\pi} (f')^2 dt = \int_0^{2\pi} f^2 dt$ omm $a = 0$ och $f = C\sin(t-\alpha)$. $\square$

Fourierutveckling.

För funktionerna $\sin mt$, $\cos mt$ gäller att $\int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt\, dt = \int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt\, dt = 0$ om $m \neq n$, medan $\int_0^{2\pi} \cos^2 mt\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 mt\, dt = \pi$ för $m > 0$, och $\int_0^{2\pi} \cos mt \sin nt\, dt = 0$. Detta kan visas med additionsformlerna för sinus och cosinus. Vi har bekantligen

$$\cos(m+n)t = \cos mt \cos nt - \sin mt \sin nt\ ,$$
$$\cos(m-n)t = \cos mt \cos nt + \sin mt \sin nt\ .$$

Påståendet följer nu eftersom $\int_0^{2\pi} \cos kt\, dt = 0$ om $k \neq 0$, och har värdet 2π för $k = 0$. På samma sätt får man $\int_0^{2\pi} \cos mt \sin nt\, dt = 0$ ur sinusformeln.

Varje 2π-periodisk funktion $f(t)$ kan nu utvecklas som

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) ,$$

där $a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos mt\, dt$ och $b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin mt\, dt$. Frågan, när serien konvergerar punktvis mot $f(t)$, tas upp i Fourieranalyskursen. Detta är sant för styckvis glatta, kontinuerliga funktioner, och då får vi skriva likhetstecken. Fourierutvecklingen för f' fås genom att derivera serien:

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-ka_k \sin kt + kb_k \cos kt) .$$

Vi visar nu Wirtingers olikhet. Antagandet att $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ ger att $a_0 = 0$. Vi beräknar $\int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \pi(a_k^2 + b_k^2)$ genom att termvis integrera Fourierseriens kvadrat. På samma sätt är $\int_0^{2\pi} (f')^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \pi(k^2 a_k^2 + k^2 b_k^2)$. Detta ger

$$\int_0^{2\pi} (f')^2 - f^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} \pi(k^2 - 1)(a_k^2 + b_k^2) \geq 0 ,$$

med likhet omm $a_k = b_k = 0$ för alla $k \geq 2$, d v s $f(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t$. □

Övningar

1. Låt $\boldsymbol{\gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ vara en kurva av längd l med ändpunkter på y-axeln, som tillsammans med sträcken $\overline{\boldsymbol{\gamma}(\alpha)\boldsymbol{\gamma}(\beta)}$ bildar en enkel sluten kurva, som omslutar en area A. Visa att $l^2 \geq 2\pi A$ med likhet om och endast om $\boldsymbol{\gamma}$ är en halvcirkel. Ledning: använd Wirtingers olikhet i bokens form.

2. Använd föregående övningen för att visa den isoperimetriska olikheten för konvexa kurvor.