

Tentamensskrivning i **Galoisteori, MAN 630**

Varje uppgift ger 3 poäng. För Godkänd krävs minst 12 poäng, varav minst 7 på problemdelen 1—5 (bonuspoäng får tillgodoräknas här).
Förklara noggrant dina svar.

1. Låt $K = \mathbb{Q}(\zeta_5)$, där $\zeta_5^5 = 1$, $\zeta_5 \neq 1$.
 - (a) Ange graden av utvidgningen $K : \mathbb{Q}$, ett minimalpolynom för ζ_5 och en bas för $K : \mathbb{Q}$.
 - (b) Vad är $\text{Gal}(K : \mathbb{Q})$? Är utvidgningen en Galoisutvidgning?
 - (c) Vilka delutvidgningar har $K : \mathbb{Q}$? För varje delutvidgning L_i av $K : \mathbb{Q}$, ge en generator för $L_i : \mathbb{Q}$ och en generator för $K : L_i$ tillsammans med deras minimalpolynom. Vilka delutvidgningar är normala?
2. Vilka grupper kan förekomma som Galoisgrupp för splittringskroppen till ett polynom av grad 4 (reducibelt eller irreducibelt, utan multipla nollställen).
Ge exempel i de enklare fallen.
3. Låt τ vara transcendent över $\mathbb{Q}$.
Visa att även $\tau + \sqrt{2}$ är transcendent över $\mathbb{Q}$ och att $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\tau)$.
Bestäm graden $[\mathbb{Q}(\tau, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\tau + \sqrt{2})]$.
Ge två exempel på icke-enkla kroppsutvidgningar.
4. Skriv allt som du kan om splittringskroppen för polynomet $X^3 - 7$ över $\mathbb{Q}$.
5. Låt $K : F$ vara en ändlig separabel kroppsutvidgning; låt $f \in K[X]$.
Visa att det finns ett icke-trivialt polynom $g \in K[X]$ sådant att polynomet $f(X)g(X) \in F[X]$.
6. Låt K, L, M vara kroppar med $M \supset L \supset K$. Visa att $[M : K] = [M : L] \times [L : K]$.
7. Formulera och bevisa struktursatsen om ändliga utvidgningar av ändliga kroppar.
8. Visa att om splittringskroppen L över K för ett polynom $f \in K[X]$ är en r -utvidgning, så är $\text{Gal}(L : K)$ en lösbar grupp. (Det går att använda hjälpsatser; formulera dem!)