

Tentamensskrivning i **Galoisteori, MAN 630**

Varje uppgift ger 3 poäng. För Godkänd krävs minst 12 poäng, varav minst 7 på problemdelen 1—5 (bonuspoäng får tillgodoräknas här).

Förklara noggrant dina svar.

1. Låt $L = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5})$. Bestäm :
 - (a) graden $[L : \mathbb{Q}]$ och en bas för $L \supset \mathbb{Q}$;
 - (b) Galoisgruppen $G = \text{Gal}(L : \mathbb{Q})$;
 - (c) fixkroppen $L^G \subset L$;
 - (d) det normala höljet till $L : \mathbb{Q}$, and dess grad.
 - (e) Kroppen L innehåller $\sqrt[6]{5}$ men inte alla andra nollställen till polynomet $X^6 - 5$. Medför det att L inte är normal över sig själv? Varför?
2. Låt $L = \mathbb{F}_2(\alpha)$, där $\mathbb{F}_2$ är en kropp med två element och α är ett nollställe till polynomet $X^4 + X^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.
Motivera att Galoisgruppen $G(L, \mathbb{F}_2)$ innehåller en delgrupp H med två element och bestäm $\beta \in L$ så att fixkroppen $L^H = \mathbb{F}_2(\beta)$.
3. Ge exempel på följande, med utförliga kommentar :
 - (a) En icke-normal kroppsutvidgning;
 - (b) En icke-separabel kroppsutvidgning;
 - (c) Fem primtal p sådana att en regelbunden p -hörning kan konstrueras med passare och linjal.
4. Konstruera en Galoisutvidgning $K \supset \mathbb{R}(X)$ vars Galoisgrupp har 4 element. (Med $\mathbb{R}(X)$ menas kroppen av rationella funktioner i en variabel med reella koefficienter.)
5. Ge ett exempel på en kropp $K \supset \mathbb{Q}$ med exakt 5 äkta delutvidgningar.
6. Ange definitionen för en normal kroppsutvidgning.
Visa att en ändlig utvidgning $L : K$ är normal då och endast då L är en splittringskropp till ett polynom med koefficienter i K .
7. Bevisa att :
 - (a) Om $\alpha \in L \supseteq K$ är ett algebraiskt element över K , så kan varje element i $K(\alpha)$ skrivas entydigt på formen $a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$, där $a_i \in K$ och n är graden av minimalpolynomet för α över K .
 - (b) Om $\alpha \in L \supseteq K$ är ett transcendent element över K , så är $K(\alpha) \simeq K(X)$, där $K(X)$ är kroppen av de rationella funktionerna över K .
8. Låt K vara en kropp med karakteristik 0, $n \in \mathbb{N}$, $a \in K$. Låt L vara en splittringskropp för polynomet $X^n - a$ över K . Visa att Galoisgruppen $G(L : K)$ är lösbar. Beskriv Galoisgruppen i fall $K = \mathbb{Q}$, $n = 3$ och $a = 7$.