MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i **Galoisteori, 5p**
1996-01-13, kl 8.45 - 13.45.

1. Bestäm alla primtal p sådana att ekvationen $x^p - 1 = 0$ har alla sina nollställen i kroppen $\mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$.

2. (a) Bestäm Galoisgruppen $G(L : \mathbb{Q})$ då $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5 + \sqrt{5}})$.

   (b) Är utvidgningen $L \supset \mathbb{Q}$ normal?

   (c) Bestäm alla delkroppar till L.

3. Ge exempel på:

   (a) En icke-separabel kroppsutvidgning.

   (b) En ekvation av grad 1996 som inte är r-lösbar.

   (c) En regelbunden månghörning som inte kan konstrueras med passare och linjal.

   Motivera noga Dina svar!

4. Bestäm en kropp $L = \mathbb{Q}(\varepsilon)$, där $\varepsilon^n = 1$, som innehåller kroppen $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$.

5. Definiera en $\mathbb{R}$-automorfism $\sigma : \mathbb{R}(x, y) \to \mathbb{R}(x, y)$ så att $\sigma(x) = -y$, $\sigma(y) = x$. Låt $G =< \sigma >$ vara gruppen genererad av σ. Bestäm fixkroppen $\mathbb{R}(x, y)^G$ för denna grupp.

6. Låt $K \subseteq L$ vara en kroppsutvidgning. Visa att alla element i L algebraiska över K bildar en kropp.

7. Formulera och bevisa satsen om primitiva element.

8. Visa att en ändlig kroppsutvidgning $K \subseteq L$ är normal då och endast då L är en splittringskropp för ett polynom med koefficienter i K.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänd skrivning krävs minst 12p varav minst 7 på problemdelen 1 – 5 (bonuspoängen får tillgodoräknas här).