

1. Bestäm Galoisgruppen $G(L, \mathbb{Q})$ för splittringskroppen L av polynomet $f(x) = x^6 - 4x^3 + 3$. Bestäm alla delgrupper till $G(L, \mathbb{Q})$ samt motsvarande delkroppar till L .
2. Låt $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2})$.
 - (a) Bestäm ett primitivt element α för L (dvs $L = \mathbb{Q}(\alpha)$).
 - (b) Bestäm normala höljet till $L \supset \mathbb{Q}$.
3. Ge exempel på:
 - (a) En icke-separabel kroppsutvidgning;
 - (b) En icke-normal kroppsutvidgning;
 - (c) En regelbunden månghörning som inte kan konstrueras med passare och linjal.Kommentera utförligt!
4. Låt $L = \mathbb{Z}_2(\alpha)$, där α är ett nollställe till polynomet $X^4 + X^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$. Motivera att Galoisgruppen $G(L, \mathbb{Z}_2)$ innehåller en delgrupp H med två element och bestäm $\beta \in L$ så att fixkroppen $L^H = \mathbb{Z}_2(\beta)$.
5. Låt $L \supset \mathbb{Q}$ vara en kroppsutvidgning av graden 4. Visa att L innehåller högst tre kvadratiske kroppsutvidgningar av $\mathbb{Q}$. Kan L innehålla exakt två kvadratiske utvidgningar eller exakt en sådan utvidgning?
6. Formulera och bevisa Dedekinds Lemma.
7. Låt $L \supseteq K$ vara en Galoisutvidgning och låt M vara en kropp mellan K och L .
 - (a) Visa att $L \supseteq M$ är en Galoisutvidgning.
 - (b) Visa att $M \supseteq K$ är en Galoisutvidgning då och endast då $G(L, M)$ är en normal delgrupp till $G(L, K)$.
8. (a) Vad menas med att en ekvation $f(X) = 0$, $f \in K[X]$, är r -lösbar över K ?
(b) Visa att den allmänna ekvationen $X^n - s_1X^{n-1} + s_2X^{n-2} + \dots + (-1)^n s_n = 0$ inte är r -lösbar över $K(s_1, s_2, \dots, s_n)$ då $n \geq 5$.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänd skrivning krävs minst 12p varav minst 7 på problemdelen 1 – 5 (bonuspoängen får tillgodoräknas här).

Resultaten meddelas senast torsdagen den 15 februari.