Naturvetenskaplig problemlösning, HT 1998

Övningar i Linjär algebra och analys

Jan Petersson, Tillämpad linjär algebra:

2.1cd, 2.2a, 2.4, 2.5b, 2.7, 2.8e, 2.9a, 2.11;
3.3, 3.4, 3.5, 3.11a, 3.13, 3.15, 3.16, 3.21, 3.23, 3.24ab, 3.28b, 3.32, 3.41;
4.10dfgi, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14ac, 4.16b.

Problemsamling till Linjär algebra med tillämpningar:

1, 3, 5deh, 8bc;

12, 13, 14ac, 15ab, 16, 17ac, 20b, 22ac, 23b, 28, 31ad, 33ad, 34ab, 35ab, 36b, 41acd, 44a, 45a;

46, 48, 49, 51, 53, 55, 58, 59, 61a, 62, 64a, 67a, 70, (73, 74ab), 76, 77, 79ac, 81a, 83, 84, 85, 86, 87, 89ab, 91;

92, 93, 94cde, 95cdf, 96ab, 99, 100b, 103, 104, 105, 108ab, 110, 111, 112, 115, 116ac, 117ad, 118b, 121;

123aeg, 124, 125, 126, 128, 132, 133, 134ac, 139, 141, 144ab, 146, 149, 150, 157a, 158a, 159, 160a, 164abde, 166a, 172, 176, 179, 180, 183, 185ab.

Fourierserier

Bestäm Fourierserien till var och en av följande funktioner (intervallet är $(-\pi, \pi)$):

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{då } \frac{\pi}{2} < |x| < \pi \end{cases}$.

2. $f(x) = |x|$.

3. $f(x) = x^2$.

4. $f(x) = x^2 + |x|$.

5. $f(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{då } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{då } 0 < x < \pi \end{cases}$.

6. Bestäm för alla $x \in \mathbb{R}$ Fourierseriens summa för serierna i **1-5**. Rita summans graf.

7. Utveckla i cos-serie på $(0, \pi)$ funktionen $\sin x$.

8. Utveckla x^2 i **(a)** Fourierserie med perioden 2 på $(-1, 1)$; **(b)** sin-serie på $(0, 1)$.

9. Utveckla $|\sin x|$ i Fourierserie med perioden π.

10. Finns det någon funktion sådan att $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ existerar och som har Fourierserien $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$?

11. Bestäm summan av följande serier

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$;

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

Svar

1. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos(2k-1)x$; 2. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-2} \cos(2k-1)x$; 3. $\frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \cos kx$; 5. $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos 2kx$; 7. $\frac{4}{\pi}[\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (4k^2-1)^{-1} \cos 2kx]$; 9. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kt}{4k^2-1}$; 10. nej; 11. $\frac{\pi^2}{8}$; $\frac{\pi^4}{96}$; $\frac{\pi^4}{90}$.