Naturvetenskaplig problemlösning, HT 1998

Inlämningsuppgifter i Linjär algebra och analys, 1

1. Beräkna strömmen genom vart och ett av motstånden nedan för $R = 1\,\Omega$. Låt sedan R variera och räkna ut strömmarna som en funktion av R.

2. Hur kan man på ett någorlunda enkelt sätt beräkna motståndet mellan punkterna A och B?

Givet motstånden i den ena av kopplingarna nedan, går det att finna motstånden i den andra så att de två blir ekvivalenta (d.v.s. så att man inte kan se skillnad på dem utanför den "svarta lådan")?

Använd resultatet för att beräkna motståndet mellan A och B.

Inlämnas kl. 10.00, fredagen den 9/10.

3. Låt

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1, \quad x_k - x_{k-1} = h = \frac{1}{n},$$

och betrakta

$$V_h = \{f \in C[0,1] : f \text{ linjär funktion på varje intervall } [x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, n\}$$

(a) Visa att V_h är ett underrum i $C[0,1]$.[1]

(b) Låt $\phi_k \in V_h$, $\phi_k(x_i) = \delta_{ik}$. Visa att funktionerna $\{\phi_k\}_{k=0}^n$ bildar en bas i V_h.

(c) Betrakta $V_h^0 = \{f \in V_h : f(0) = f(1) = 0\}$. Visa att V_h^0 är ett underrum i V_h.

(d) Bestäm V_h^0:s dimension och ge förslag till två (väsentligen) olika baser i V_h^0, en av dem (B) en lämplig modifikation av basen i **(b)**.

(e) Låt $a(x)$ vara en kontinuerlig positiv funktion på intervallet $[0,1]$. Inför den skalära produkten $< f, g >_a = \int_0^1 a(x) f'(x) g'(x) dx$. Visa att $< \cdot, \cdot >_a$ verkligen definierar en skalär produkt i V_h^0. Ge en lämplig tolkning av derivatorna i integralen ovan.

(f) Låt $u(x) = \sin(\pi x)$, $n = 4$, $a(x) = 1$ för alla $x \in [0,1]$. Bestäm en funktion $U \in V_h^0$ sådan att $< u - U, v >= 0$ för alla $v \in V_h^0$. Lägg märke till att u inte ligger i V_h^0, så att skalärprodukten måste tas i ett annat (större) linjärt rum. Vilket? Ge en geometrisk tolkning av U.

Inlämnas kl. 10.00, fredagen den 9/10.

[1] linjär funktion kallas funktion av typen $ax + b$