MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i
Linjär algebra och analys, Naturvetenskaplig Problemlösning
Datum: 96-12-12, kl. 8.45-13.45
Telefonvakt:
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator

1. Sant eller falskt? (Rätt svar ger +1p; fel svar −1p; inget svar 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

(a) Låt A och B vara kvadratiska matriser av samma typ. Om matrisen AB är inverterbar så är även A inverterbar.

(b) Om U är ett n-dimensionellt underrum till det n-dimensionella rummet V så gäller $U = V$.

(c) Om matrisen A är diagonaliserbar så är kolonnerna i A linjärt oberoende.

(d) Om v är egenvektor till A hörande till egenvärde $\lambda \neq 0$ så tillhör v värderummet $V(A)$.

(e) Låt $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ vara Fourierserien med perioden 2π till funktionen $f(x) = x^3$, $x \in (-\pi, \pi)$. Då gäller $F(5) > 0$.

(f) Låt $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ vara Fourierserien med perioden 2π till funktionen $f(x) = x^3$, $x \in (-\pi, \pi)$. Då gäller $F(3) > 0$.

2. Låt F vara en symmetrisk linjär avbildning på det linjära rummet V. Visa att egenvektorer hörande till olika egenvärden är ortogonala. (2p)

3. Om A är en ortogonal $n \times n$ matris, visa att $(Ax, Ay) = (x, y)$ för alla $x, y \in \mathbb{R}^n$. (2p)

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 20 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Visa att $\dim N(A) > 0$. (2p)

5. Betrakta rummet $\mathcal{P}_3[0,1]$ av alla polynom av grad högst tre på intervallet $[0,1]$ med skalärprodukten $(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$. Bestäm en ortonormerad bas i underrummet $\mathcal{P}_1[0,1]$ bestående av alla polynom av grad högst ett på $[0,1]$. Bestäm projektionen av t^3 på $\mathcal{P}_1[0,1]$. (3p)

6. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en symmetrisk linjär avbildning som har egenvärdena 1 (dubbelt) och -1 (enkelt).

(a) Visa att F är spegling i något plan. (2p)

(b) Om A är F:s matris i standardbasen, visa att $A^2 = E$. (1p)

(c) Visa att A är ortogonal. (1p)

7. Lös systemet ordinära differentialekvationer

$$x'(t) = Ax(t), \quad \text{där} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(3p)}$$

8. Bestäm Fourierserien med perioden 2π till funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{då} \quad -\pi < x < 0 \\ x & \text{då} \quad 0 < x < \pi \end{cases}. \qquad \text{(3p)}$$