MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i
Linjär algebra och analys, Naturvetenskaplig Problemlösning
Datum: 97-02-08, kl. 8.45-13.45
Telefonvakt: Elise Björkholdt, tel. 0740 - 47 96 26
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator

1. Sant eller falskt? (Rätt svar ger +1p; fel svar −1p; inget svar 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

(a) Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ vara en linjär avbildning. Då gäller att $\dim N(F) < 3$.

(b) Funktionerna $\sin^2 t,\ \ln t,\ 1,\ \cos^2 t$ är linjärt beroende i $C[1, \infty)$.

(c) Varje diagonaliserbar matris är symmetrisk.

(d) Om 2 är ett egenvärde till matrisen A, så är 4 ett egenvärde till matrisen A^2.

(e) Om $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är ortogonalprojektion på ett plan genom origo, så är matrisen för P i standardbasen symmetrisk.

(f) Funktionerna

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi, 0) \\ 0, & x \in [0, \pi) \end{cases} \qquad \text{och} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi, 0] \\ 0, & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

har samma Fourierserie (på intervallet $(-\pi, \pi)$).

2. Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz' olikhet. Förklara när likhet inträffar. (2p)

3. Låt $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vara egenvärden till den linjära avbildningen F med motsvarande egenvektorer $u_1,\ u_2$. Visa att $u_1,\ u_2$ är linjärt oberoende. (2p)

4. Finn matrisen för den linjära operator $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, som avbildar vektorerna $u_1 = (2, 3, 5),\ u_2 = (0, 1, 2),\ u_3 = (1, 0, 0)$ på vektorerna $v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, 1, 0),\ v_3 = (2, 1, 2)$ (u_k avbildas på v_k och alla koordinater är i standartbasen). (2p)

5. Bestäm avståndet från punkten $(4,-1,-3,4)$ till underrummet (till $\mathbb{R}^4$) $U = \operatorname{span}\{(1,1,1,1),\ (1,2,2,-1)\}$. (3p)

6. Betrakta rummet $\mathcal{P}_4$ av alla polynom av grad högst fyra (på $\mathbb{R}$). Låt $F : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$ vara en linjär avbildning som ges av $F(p) = 2p - tp'$, $p = p(t) \in \mathcal{P}_4$. Bestäm $N(F)$. (3p)

7. Visa att 1 är egenvärde till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Om $q(x_1, x_2, x_3)$ är den kvadratiska formen med koefficientmatris A, bestäm q:s karaktär (d.v.s. positivt (semi)definit, negativt (semi)definit, indefinit). (3p)

8. Utveckla i sin-serie på intervallet $(0, \pi)$ funktionen $f(x) = x^2$. (3p) Bestäm (analytiskt eller grafiskt) seriens summa för alla $x \in \mathbb{R}$. (1p)