MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i MIN600
Linjär algebra och analys, Naturvetenskaplig Problemlösning
Datum: 98-01-03, kl. 8.45-13.45
Telefonvakt: Anette Wiberg, tel. 0740-479626
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator

1. Sant eller falskt? (Rätt svar ger +1p; fel svar −1p; inget svar 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

(a) Låt $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ vara en linjär avbildning. Då gäller att F är inverterbar.

(b) Mängden av alla polynom p av grad 3 som uppfyller $p(0) = 1$ bildar ett underrum i $\mathcal{P}_3$.

(c) Om V är ett linjärt rum, U är ett underrum till V och $F : V \to V$ är en linjär avbildning, så gäller att $\dim F(U) \leq \dim U$.

(d) Låt V vara ett linjärt rum med skalärprodukt. Om $< u, w > = < v, w >$ för alla $w \in V$, så gäller att $u = v$.

(e) Om matrisen A är matris för en projektion på ett plan genom origo, så gäller att $A^2 = A$.

(f) En Fourierserie är alltid en periodisk funktion.

2. Låt V vara ett linjärt rum med skalärprodukt och U vara ett underrum till V. Visa att $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$. (2p)

3. Låt $< . , . >$ beteckna den vanliga skalärprodukten i $\mathbb{R}^n$ och antag att A är en symmetrisk $n \times n$ matris. Visa att $< Ax, y > = < x, A^t y >$ för alla $x, y \in \mathbb{R}^n$. (2p)

4. Låt V vara det underrum i $C(\mathbb{R})$, som spänns av funktionerna $f_1(x) = \cos x$ och $f_2(x) = \sin x$.

(a) Visa att f_1 och f_2 bildar en bas i V. (1p)

(b) Låt $F(f) = f''$ $(= \frac{d^2 f}{dt^2})$. Finn matrisen A för F i basen f_1, f_2. (1p)

5. Låt $U = \text{span}\,\{(1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3)\}$ och $V = \text{span}\,\{(2,3,-1),(1,2,2),(1,1,-3)\}$. Bestäm en bas i $U \cap V$. (3p)

6. Bestäm avståndet från vektorn $v = (4,-1,-3,4)$ till underrummet $U = \text{span}\,\{(1,1,1,1),(1,2,2,-1),(1,0,0,3)\}$. (4p)

7. Bestäm den geometriska betydelsen av den linjära avbildning i rummet som (i en positivt orienterad ON bas) har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3p)$$

8. Bestäm Fourierserien med perioden 2π till funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{då} \quad -\pi < x < 0 \\ 2x & \text{då} \quad 0 < x < \pi \end{cases}.$$

Bestäm i vilka punkter Fourierserien och f sammanfaller. (3p)