MATEMATIK
Göteborgs universitet

**Tentamensskrivning i**
**Linjär algebra och analys, Naturvetenskaplig Problemlösning**
Datum: 97-06-05, kl. 8.45-13.45
Telefonvakt: Elise Björkholdt, tel. 0740 - 47 96 26
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator

**1.** Sant eller falskt? (Rätt svar ger +1p; fel svar $-1$p; inget svar 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

**(a)** Låt $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$ vara en linjär avbildning. Då gäller att $\dim V(F) = 2$.

**(b)** Funktionerna $e^x$, $e^{2x}$, $1$, $xe^x$ är linjärt oberoende i $C^\infty(-\infty, \infty)$.

**(c)** Varje ortogonal matris är diagonaliserbar.

**(d)** Om $v$ är en egenvektor till matrisen $A$, så är $v$ även egenvektor till matrisen $A^2$.

**(e)** Mängden av alla lösningar till differentialekvationen $y''+y'+y = 1$, $y = y(x)$, bildar ett tvådimensionellt linjärt rum.

**(f)** Mängden av alla lösningar till systemet differentialekvationer $\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(t)$, $A$ är en $n \times n$ matris, bildar ett $n-$dimensionellt linjärt rum.

**2.** Visa att om en uppsättning $M$ vektorer i det linjära rummet $V$ innehåller nollvektorn, så är vektorerna i $M$ linjärt beroende (i $V$). (2p)

**3.** Om $A$ är en $n \times n$ matris och $(Ax, Ay) = (x, y)$ för alla $x, y \in \mathbb{R}^n$, visa att $A$ är ortogonal. (2p)

**4.** Finn en $3\times3$ matris vars värderum genereras av vektorerna $(2, 1, 0)^t$, $(1, 0, -1)^t$. (2p)

**5.** Betrakta rummet $V = C[0, \pi]$ av alla kontinuerliga funktioner på intervallet $[0, \pi]$ med skalärprodukten $(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx$. Bestäm projektionen av $x^2$ på det underrum till $V$ som genereras av $\sin x$, $\sin 2x$. (3p)

**6.** Betrakta rummet $\mathcal{P}_4$ av alla polynom av grad högst fyra (på $\mathbb{R}$). Låt $F : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$ vara avbildningen som ges av $F(p) = 2tp'$, $p = p(t) \in \mathcal{P}_4$.
**(a)** Visa att $F$ är en linjär avbildning. (1p)
**(b)** Bestäm $V(F)$. (2p)

**7.** Låt $F$ vara avbildningen spegling i planet $x + z = 0$. Bestäm matrisen för $F$. (3p)

**8.** Utveckla i cos-serie på intervallet $(0, \pi)$ funktionen $f(x) = x(1 - x)$. (3p) Bestäm (analytiskt eller grafiskt) seriens summa för alla $x \in \mathbb{R}$. (1p)