MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i MIN600
Linjär algebra och analys, Naturvetenskaplig Problemlösning
Datum: 98-06-06, kl. 8.45-13.45
Telefonvakt: Sebastian Sandberg, tel. 0740-479626
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator

1. Sant eller falskt? (Rätt svar ger +1p; fel svar −1p; inget svar 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

(a) Låt $F : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^6$ vara en linjär avbildning. Då gäller att F ej är inverterbar.

(b) Mängden $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 \geq 0\}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^2$.

(c) Matrisen $A + A^t$ är symmetrisk för varje kvadratisk matris A.

(d) Om A är en ortogonal matris, så gäller $|\det A| = 1$.

(e) Om en matris A:s alla egenvärden är lika med 0, så är A nollmatrisen.

(f) Låt $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ vara Fourierserien med perioden 2π till funktionen $f(x) = |x|$, $x \in (-\pi, \pi)$. Då gäller $F(7) = 7$.

2. Formulera och bevisa triangelolikheten (i rum med skalär produkt). Förklara när likhet inträffar. (2p)

3. Låt A vara en ortogonal $n \times n$ matris. Visa att $||Ax|| = ||x||$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$. (2p)

4. Finn en 4×4 matris, vars värderum innehåller vektorerna $(1, 0, 1, 0)^t$, $(0, 1, 0, 1)^t$. (2p)

5. Bestäm avståndet från punkten $(0, 0, 0, 1)$ till underrummet (till $\mathbb{R}^4$) $U = \operatorname{span}\{(1, 1, 1, 1),\ (1, 2, 2, -1)\}$. (3p)

6. Visa att matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

inte är diagonaliserbar. (3p)

7. Skriv om differentialekvationen

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$$

som ett första ordningens system. (1p) Lös systemet. (2p) Lös sedan differentialekvationen utan att skriva om den. (1p) Får man samma lösningar på båda sätten?

8. Utveckla i sin-serie på intervallet $(0, \pi)$ funktionen $f(x) = \cos x$. Bestäm i vilka punkter Fourierserien och f sammanfaller. (3p)