MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i
Linjär algebra och analys, Naturvetenskaplig Problemlösning
Datum: 97-08-26, kl. 8.45-13.45
Telefonvakt: Ola Helenius, tel. 0740 - 47 96 26
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator

1. Sant eller falskt? (Rätt svar ger +1p; fel svar −1p; inget svar 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

(a) Låt $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ vara en linjär avbildning. Då gäller att $\dim N(F) > 0$.

(b) Funktionerna $1,\ \cos x,\ \sin x$ är linjärt oberoende i $C^\infty(-\pi, \pi)$.

(c) Varje ortogonal matris är symmetrisk.

(d) Varje symmetrisk matris är ortogonal.

(e) Om $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är ortogonalprojektion på ett plan genom origo, så finns en ortonormerad bas i $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer till P.

(f) Varje linjär ordinär differentialekvation kan skrivas om som ett första ordningens system ordinära differentialekvationer.

2. Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz' olikhet. Förklara när likhet inträffar. (2p)

3. Låt A vara en ortogonal 3×3-matris sådan att $\det A = 1$. Visa att 1 är ett egenvärde till A. (2p)

4. Visa att vektorerna $(1, 2, -1, 3),\ (-1, -2, 1, 1)$ är linjärt oberoende och finn en bas i R^4 i vilken de ingår. (2p)

5. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finn en bas i R^3 i vilken F ges av en diagonalmatris. (3p)

6. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen matrisen

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Visa att F är spegling i ett plan. (2p) Ange ekvationen för planet. (2p)

7. Skriv om differentialekvationen

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

som ett första ordningens system. (1p) Lös sedan systemet. (2p)

8. Bestäm Fourierserien med perioden 2π till funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då} \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{då} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{då} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} . \qquad (2\text{p})$$

Bestäm (analytiskt eller grafiskt) seriens summa för alla $x \in \mathbb{R}$. (1p)