MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i MIN600
Linjär algebra och analys, Naturvetenskaplig Problemlösning
Datum: 98-08-22, kl. 8.45-13.45
Telefonvakt: Martin Brundin, tel. 0740-479626
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator

Skrivningen beräknas vara färdigrättad den 31/8.
Tentor kan hämtas i mottagningsrummet kl. 12.30 - 13.00 varje vardag.

1. Sant eller falskt? (Rätt svar ger +1p; fel svar −1p; inget svar 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

(a) Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ vara en linjär avbildning. Då gäller att $\dim V(F) \leq 3$.

(b) Mängden $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 x_2 = 0\}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^2$.

(c) Mängden $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 = 0\}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^2$.

(d) Varje symmetrisk matris har endast reella egenvärden.

(e) Om en matris har enbart reella egenvärden, så är matrisen symmetrisk.

(f) En sin-serie är alltid en udda funktion.

2. Låt V vara ett linjärt rum med skalärprodukt. Visa att

$$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2) \quad \text{för alla} \quad u, v \in V\,.$$

Ge en geometrisk tolkning. (2p)

3. Låt F vara en symmetrisk linjär avbildning på det linjära rummet V. Visa att egenvektorer hörande till olika egenvärden är ortogonala. (2p)

4. Låt $U = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_3 = 0\}$. Om $u = (1, 2, -1, -2)$, bestäm u:s projektioner på U och $U^{\perp}$. (2p)

5. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som ges av $F(x) = x \times a$ för någon (känd) vektor $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. **(a)** Bestäm matrisen för F (i standardbasen). (2p) **(b)** Bestäm F:s nollrum. (1p)

6. Bestäm den geometriska betydelsen av den linjära avbildning i rummet som (i en positivt orienterad ON bas) har matrisen

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3p)$$

7. Skriv om differentialekvationen

$$2y''(t) - 5y'(t) + 2y(t) = 0$$

som ett första ordningens system. (1p) Lös systemet. (2p) Lös sedan differentialekvationen utan att skriva om den. (1p) Får man samma lösningar på båda sätten?

8. Utveckla i cos-serie på intervallet $(0, \pi)$ funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}.$$

Bestäm i vilka punkter Fourierserien och f sammanfaller. (3p)