

MMA 210 HÖGRE DIFF. KALKYL. INL. UPP. LV7/LV8

Låt $T = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ vara enhetscirkeln (betraktad som en mångfald med koordinater definierade som $\{U, \phi\}$, $\phi : \theta \in U \subset \mathbb{R}^1 \mapsto z = e^{i\theta} \in T$, där $U = (a, b)$ är ett intervall med längden $b - a < 2\pi$).

1. (a) Bevisa/Förklara att differentialformen $\eta = d\theta$ är väl-definierade. (OBS! θ är ej definierad på hela T !)

(b) Låt k vara ett heltal och $g : T \rightarrow T$ vara avbildningen $g : z \mapsto z^k$. Bevisa att $\frac{1}{2\pi} \int_T g^* \eta = k$ (=winding number).

(c) Låt $f : T \rightarrow T$ vara en deriverbar avbildning av $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara sin periodiska lyft med $F(\theta + 2\pi) = F(\theta) + 2\pi k$ (se Inlämningsuppgiften LV2/3). Bevisa att f och g ovan är homotopi-ekvivalenta. Bevisa därefter $\frac{1}{2\pi} \int_T f^* \eta = k$.

2. Betrakta torusen T^2 med lokal koordinater $(x^1, x^2) \rightarrow (e^{ix^1}, e^{ix^2}) \in T^2$. Bevisa att $\dim H^1(T^2) \geq 2$. (Egentligen $\dim H^1(T^2) = 2$ och $H^1(T^2) = \mathbb{R}^2$, om du kan bevisa det.)