

Tentamen. MAM 770. Högre Differentialkalkyl

Hjälpmedel. Inga

Telefonvakt: 0762-721860

1. Formulera och bevisa Inversa Funktionssatsen.
2. (a) Definiera volym/yt-elementet på en k -dimensionell orienterad delmångfald i $\mathbb{R}^n$.
(b) Bevisa att ytelementet på enhetssfären $S^3 = \{x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4; |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_4^2 = 1\}$ är given av
$$\omega = x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$
Ge en generalisering till S^{n-1} .
3. Formulera definitionen till differentialen $d\omega$ av en differentialform ω och bevisa att $dd\omega = 0$.
4. Låt V och W vara två vektorrum av dimension n och $T : V \rightarrow W$ vara en linjär transformation av rang k . (Påminn. Rang av T är dimensionen av delrummet $T(V)$ av W .) Bestäm rangen av pullback $T^* : \wedge^k W \rightarrow \wedge^k V$ och dimensionen $\dim(\text{Ker}(T^*))$ av kärnan $\text{Ker}(T^*)$.
5. Ge ett lokalt koordinatsystem för följande delmångfald i $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; |u| = |v| = 1, \langle u, v \rangle = 0\}.$$

($\langle u, v \rangle$ är inreprodukten.)

6. Bestäm (utan bevis) de Rham cohomologigrupperna $H^j(\mathbb{R}^n)$ och $H^j(S^n)$, $0 \leq j \leq n$. Bevisa att $H_c^1(\mathbb{R}^3) = 0$.
7. (a) Betrakta 2-formen $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ på $\mathbb{R}^3$. Bevisa att om en vektor $v \in \mathbb{R}^3$ är parallel med positionvektorn (x, y, z) dvs $v = c(x, y, z)$, då är $\omega(v, w) = 0$ för alla vektorer $w \in \mathbb{R}^3$.
(b) Låt M vara en två-dimensionell delmångfald (med rand eller ej) i $\mathbb{R}^3$. Bevisa (mha a och 2b) att $\int_M \omega = 0$ om M är en delmängd av konen $\{(x, y, z); x^2 + y^2 = z^2\}$, och att $\int_M \omega \neq 0$ om M är en delmängd av sfären $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$.

Lycka till! GZ.