MATEMATIK, CTH/GU. 2007-01-13. Kl. 8:30-13:30

Lösn. Tentamen. MAM 770. Högre Differentialkalkyl

Hjälpmedel. Inga Telefonvakt: 0762-721860

1. Formulera och bevisa implicita funktionssatsen med hjälp av inversa funktionssatsen.

2. Bevisa att volymelementet $dx \wedge dy \wedge dz$ i $\mathbb{R}^3$ är

$$dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin\psi dr \wedge d\psi \wedge d\theta$$

uttryckt i de sfäriska koordinaterna: $x = r\sin\psi\cos\theta, y = r\sin\psi\sin\theta, z = r\cos\psi$.

Bevis: Beräkna differentialer dx, dy, dz i polärkoordinatter.

$$dx = \sin\psi\cos\theta dr + r\cos\psi\cos\theta d\psi - r\sin\psi\sin\theta d\theta,$$

$$dy = \sin\psi\sin\theta dr + r\cos\psi\sin\theta d\psi + r\sin\psi\cos\theta d\theta$$

$$z = \cos\psi dr - r\sin\psi d\psi.$$

Dess produkt

$$\begin{aligned} &dx \wedge dy \wedge dz \\ &= dr \wedge d\psi \wedge d\theta (r^2 \sin^3\psi\cos^2\theta + r^2\sin^3\psi\sin^2\theta + r^2\sin\psi\cos^2\psi\cos^2\theta + r^2\sin\phi\cos^2\psi\sin^2\theta) \\ &= r^2 dr \wedge d\psi \wedge d\theta(\sin\phi) \end{aligned}$$

3. Låt f vara en deriverbar avbildning $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ och ω vara en differentialform på $\mathbb{R}^n$. Formulera definitionen av $f^*\omega$ (pull-back) och bevisa att $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$.

Bevis: Se kurboken, Sats 4-10.

4. (**a**) Formulera definitionen av rummet $\mathcal{T}^j(V)$ av alla anti-symmetriska tensorer på ett vektorrum V. (**b**) Antag $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär transformation av rangen $l < n$. Bestäm dimensionen av bildrummet $L^*(\mathcal{T}^k(\mathbb{R}^n))$ för alla $1 \le k \le n$. (L^* är den inducerade avbildningen, dvs pull-back.)

Lösn. (**b**). $L^* : (\mathbb{R}^n)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$ är av samma rang som L, dvs l. Enligt rangsaten finns en bas $v_1, \cdots, v_l, v_{l+1}, \cdots, v_n$ till $(\mathbb{R}^n)^*$ så att

$$L^*(v_1), \cdots, L^*(v_l)$$

är linjärt oberoende av bildar en bas för rummet $Ran(L^*)$ och

$$L^*(v_{l+1}) = \cdots = L^*(v_n) = 0$$

Fall 1: $k \le l$. Då bildar

$$L^*(v_{i_1}) \wedge \cdots L^*(v_{i_k}),\ 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le l$$

en bas för $L^*(\mathcal{T}^k(\mathbb{R}^n))$, som har därmed dim

$$\binom{l}{k}.$$

Fall 2: $k > l$. Varje element i $L^*(\mathcal{T}^k(\mathbb{R}^n))$ är en summa av termer av form $L^*(u_1) \wedge \cdots L^*(u_k)$, men factorerna $L^*(u_1)$, $...L^*(u_k)$ är linjärt beroened eftersom L^* har rang $l < k$, därför är produkten 0. Svar: Dim. är 0.

5. Bevisa (med hjälp av Implicita Funktionssatsen, till ex.) att följande delmängd är delmångfald i $\mathbb{R}^3$,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^4 + z^4 = 3\}.$$

Bevis: Skriv $F(x, y, z) = x^2 + y^4 + z^4 - 3$. Mängden $M = F^{-1}(0)$. För varje punkt $P = (x, y, z) \in M$,

$$F'(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) = (2x, 4y^3, 4z^3) \neq 0$$

ty annars $(x, y, z) = 0$ och $F(x, y, z) = x^2+y^4+z^4-3 = -3$ som motsäger $F(x, y, z) = 0$. Dvs $F'(x, y, z)$ är alltid av rang 1 på M. Därför är M en mångfold av dimension $3 - 1 = 2$.

6. Formulera definitionen av de Rham kohomologigrupperna $H^j(M)$ för en mångfald M. Bevisa enligt definitionen att $H^n(S^n) \neq 0$. (S^n är enhetsfären.)

Bevis. (Se kursboken om def.). Låt ω vara volym/area-formen på S^n, vilen av en n-form. $d\omega = 0$ ty $d\omega$ är en $n + 1$-form på en mångfald av dimension n. Därför definierar ω ett element $[\omega]$ i $H^n(S^n)$. Vi påstår $[\omega] \neq 0$. Annars, $\omega = d\alpha$ för någon $n - 1$-form α, och enligt Stokes sats

$$Area(S^n) = \int_{S^n} \omega = \int_{S^n} d\alpha = \int_{\mathrm{rand} S^n} \alpha = 0$$

ty randen av S^n är tom, vilket är en motsägelse.

7. (**a**) Låt C vara en enkel och glatt kurva på enhetssfären S^2. C delar sfären i två delar. Beteckna en av de två med M. Låt V vara den koniska kroppen som begränsas av M och radierna från sfärens medelpunkt till punkterna i C. Bevisa att

$$3\,\mathrm{Vol}(V) = \mathrm{Area}(M)$$

(Ledning: Använd Stokes sats.)

Bevis: Vi skriver volymformen $dx \wedge dy \wedge dz$ på $\mathbb{R}^3$ som $dx \wedge dy \wedge dz = \frac{1}{3} d\alpha$, där

$$\alpha = x dy \wedge dz - y dx \wedge dz + z dx \wedge dy$$

Observera att α är area-elementet på enhessfären (när den är betraktad som definierad på sfären). Vi tillämpar oss Stokes sats:

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_V dx \wedge dy \wedge dz = \frac{1}{3}\int_V d\alpha = \frac{1}{3}\int_{\mathrm{rand}\, V} \alpha.$$

Randen till V bestå av två delar, den del M som är på sfären, och den del som är på konen. Vi påstår att α är 0 på konen. Om v_1, v_2 är två tangentvektorer till konen i punkt $P = (x, y, z)$, då

$$\alpha(v_1, v_2) = \det[\vec{OP}, v_1, v_2];$$

men $\vec{OP}$ är också en tangentvector till konen, dvi $\{\vec{OP}, v_1, v_2\}$ är i samma tangentplanet, därmed $\det[\vec{OP}, v_1, v_2] = 0$ ty de är linjärt beroende. Slutligen,

$$\mathrm{Vol}(V) = \frac{1}{3}\int_M \alpha = \frac{1}{3}\mathrm{Area}(M)$$