# Lösningar MMG010 Introduktionskurs 130831

1) a) $\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=\frac{1}{3x} \iff \frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{3}=1$ (ty $x=0$ ej lösning) $\iff x^2+\frac{3}{2}x-1=0 \iff x_{1,2}=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}=\begin{cases}1/2\\-2\end{cases}$

b) $|2x-4|<4 \iff |2(x-2)|<4 \iff 2|x-2|<4 \iff |x-2|<2 \iff 2-2<x<2+2 \iff 0<x<4$

c) $2x^2-12x+22=2(x^2-6x+11)=2((x-3)^2+2)=2(x-3)^2+4\geq 4$ minsta värde för $x=3$

2) a) $\sin(75^\circ)=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)$

b) Låt $y=2^x \Rightarrow y^2-7y-8=(y+1)(y-8)$ $\therefore$ $2^x=y=-1$ saknar lösn., $2^x=y=8 \Rightarrow x=3$

c) $\frac{1}{x}<\frac{1}{x+1} \iff 0<\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+1)}{x(x+1)}=\frac{-1}{x(x+1)} \iff \frac{1}{x(x+1)}<0$ Teckenschema

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $1/x(x+1)$ | $+$ | ej def | $-$ | ej def | $+$ |

$\therefore$ Svar: $-1<x<0$

3) a) $\left(\begin{array}{cc|c}3&-2&3\\9&-6&k\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}3&-2&3\\0&0&k-9\end{array}\right)$ $\therefore$ $k\neq 9$ inga lösn.
om $k=9$ oändligt många lösn.

b) $0=x^3+3x^2-4x-12=(x+3)(ax^2+bx+c)=(x+3)(x^2+bx-4)=\begin{pmatrix}\text{ident. }x^2\text{-termen}\end{pmatrix}=(x+3)(x^2-4)$ så rötterna är $x=-3,\ -2,\ 2$.

4) a) $x^2+y^2-4y=5 \iff x^2+(y-2)^2-4=5 \iff x^2+(y-2)^2=3^2$ $\therefore$ medelpunkt $=(0,2)$, radie $=3$

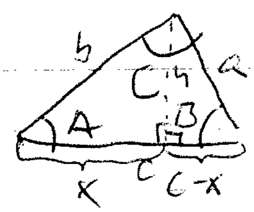
b) Form $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ $\quad R=|(-1,3)-(1,1)|=\sqrt{(-1-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8}$
$\therefore$ $(x+1)^2+(y-3)^2=8$

5) a)

$$\begin{array}{r|l} & 2x-7 = k(x)\\ \hline x^2+2x-3 & 2x^3-3x^2+4x-5\\ & -(2x^3+4x^2-6x)\\ & \quad -7x^2+10x-5\\ & -(-7x^2-14x+21)\\ & \quad 24x-26 = R(x)\end{array}$$

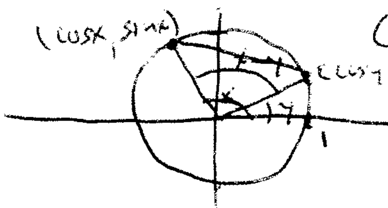
b) $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ Låt $p(x)=x^3-7x+6$. Vi ser att $p(1)=p(-3)=0$ så Faktorsatsen säger att $p(x)=(x-1)(x+3)q(x)$ och alltså går divisionen jämnt ut, dvs resten är 0.

6)




Cosinussatsen: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
Bevis: $x=b\cos A$ Pythagoras för de rätvinkliga deltrianglarna $\begin{cases}x^2+h^2=b^2 & (1)\\(c-x)^2+h^2=a^2 & (2)\end{cases}$

Cosinussatsen följer nu ty från (2) och (1) har vi
$a^2=(c-x)^2+h^2=c^2+x^2-2cx+h^2=\quad=c^2+x^2+h^2-2cx\overset{(1)}{=}$
$=c^2+b^2-2cx=c^2+b^2-2cb\cos A$ ■




Cosinussatsen på triangeln i enhetscirkeln med öppningsvinkel $x-y$ ger: $2\cdot 1\cdot 1\cos(x-y)=$
$=1^2+1^2-|(\cos x,\sin x)-(\cos y,\sin y)|^2=$

$=2-\left(\sqrt{(\cos y-\cos x)^2+(\sin y-\sin x)^2}\right)^2=2-(\cos^2 y+\cos^2 x-2\cos x\cos y+$
$+\sin^2 y+\sin^2 x-2\sin y\sin x)=2-(\cos^2 y+\sin^2 y+\cos^2 x+\sin^2 x$
$-2(\cos x\cos y+\sin x\sin y))=2-(2-2(\cos x\cos y+\sin x\sin y))=$
$=2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$ $\therefore$ $\underline{\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y}$