Svar eller lösningar till

Tentamen i Elementär talteori, MMG100 21/8 2013

1. Bestäm alla heltal *x* sådana att $\begin{cases} x \equiv 1 & (mod\ 4) \\ 2x \equiv 3 & (mod\ 5) \\ 4x \equiv 5 & (mod\ 7) \end{cases}$ **(3p)**

   Lösning: kinesiska restsatsen ger $x = 3 \cdot 35 \cdot 1 + 4 \cdot 28 \cdot 2 + 3 \cdot 20 \cdot 6 = 689$ *och* $689 \equiv 129\ \ (mod\ 140)$.

2. Låt *p* vara ett primtal > 11.
   Visa att $r = 9$ inte är en primitiv rot till *p*. **(3p)**

   Lösning: eftersom $9 = 3^2$ *är* $9^{\frac{p-1}{2}} = 3^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.
   Då kan 9 inte vara en primitiv rot.

3. Bestäm alla heltal *x* och *y* sådana att $x^2 + 11xy + 1 = 0$ **(3p)**

   Lösning: om ekvationen ovan gäller är $x^2 + 1 \equiv 0\ (mod\ 11)$.
   Men $\left(\frac{-1}{11}\right) = -1$ *eftersom* $11 \equiv 3\ (mod\ 4)$.
   Alltså finns inga heltalslösningar till den givna ekvationen.

4. Bestäm den minsta resten då $(33!)^2$ divideras med 67. **(4p)**

   Lösning: eftersom 67 är primtal är $66! \equiv -1\ (mod\ 67)$.
   Dessutom är $66! = 33! \cdot 34 \cdot 35\ \ldots \cdot 66\ \equiv 33! \cdot (-33) \cdot (-32) \cdot\ \ldots \cdot (-1) =$
   $= (33!)^2(-1)^{33}\ \ (mod\ 67)$ *Det följer att* $(33!)^2 \equiv 1\ (mod\ 67)$

5. Låt *p* och *q* vara udda primtal med $q > p$.
Antag att $q-1$ är delbart med $p-1$.
Visa att $4^{q-1}-1$ är delbart med pq **(3p)**

Lösning: säg att $q-1 = k(p-1)$ *eftersom 4 är relativt primt mot både p och q är*
$4^{q-1} \equiv 1\ (mod\ q)$ och $4^{q-1} = 4^{k(p-1)} \equiv 1\ (mod\ p)$
och eftersom p och q är relativt prima blir $4^{q-1} \equiv 1\ (mod\ pq)$

6. Låt *p* vara ett udda primtal och bilda talen $4, 8, 12, \dots, 2p-2$.
Reducera alla dessa tal modulo *p* och betrakta de minsta positiva resterna. Låt *N* vara antalet av dessa rester som är $> \frac{p}{2}$.
Visa att *N* är jämnt. **(4p)**

Lösning: enligt Gauss lemma är $\left(\frac{4}{p}\right) = (-1)^N$. *Men* $\left(\frac{4}{p}\right)$ *är =1 så N måste vara jämnt.*

7. Antag att för något givet *k* ekvationen $\Phi(n) = k$ har en unik lösning *n*.
Visa att *n* är delbart med 36.
(*Här är* Φ *som vanligt Eulers funktion.)* **(5p)**

Lösning: om n är udda är $\Phi(n) = \Phi(2n)$
om n är jämnt men inte delbart med 4 är $\Phi(n) = \Phi\left(\frac{n}{2}\right)$.
Låt alltså n vara $= 4m$ *för något heltal m.*
Om m inte är delbart med 3 är $\Phi\left(\frac{3n}{2}\right) = \Phi(3)\Phi(2m) = 2\Phi(2m) = \Phi(n)$
Om m är delbart med 3 men inte med 9 är på samma sätt $\Phi\left(\frac{2n}{3}\right) = \Phi(n)$.
Alltså måste n vara delbart med 36.