EUKLIDISK GEOMETRI

Torbjörn Tambour

Matematiska institutionen
Stockholms universitet
Första upplagan 2002

Postadress

Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm

Besöksadress

Kräftriket hus 5 och 6

Internet

www.matematik.su.se

Till lärare och läsare

Föreliggande kompendium är tänkt att kunna användas i undervisningen i euklidisk geometri för blivande lärare. En grundkurs bör omfatta avsnitt 2.1 - 2.10, 2.12, 3.1 - 3.2, början av 3.3 och 3.4 (existensen av de om- och inskrivna cirklarna), 4.1 samt eventuellt delar av kapitel 5 (något om konstruktioner med passare och linjal). Jag har tänkt mig att resten av kompendiet skall kunna användas som bredvidläsning och eventuellt inom senare kurser i utbildningen. De mest grundläggande delarna av geometrikursen innehåller egentligen inga verkligt förvånande resultat (att triangelns vinkelsumma är 180 grader torde exempelvis vara bekant för alla och envar) och min förhoppning med överkursavsnitten är att läsaren skall få se något oväntat och förvånande.

Syftet med kompendiet är inte att ge en axiomatisk framställning av den euklidiska geometrin, vilket dock inte innebär att bevis saknas, men jag har tagit en del grundläggande saker för givna, t ex kongruens- och likformighetsfallen och där stöder sig framställningen på åskådningen och den geometriska intuitionen. I det sista avsnittet finns en kort diskussion om geometrins grunder och den axiomatiska metoden.

Det går inte att lära sig matematik och geometri utan att lösa problem, så det finns gott om övningar både i slutet av varje kapitel och i ett separat avsnitt sist i häftet. De flesta är hämtade från gamla skrivningar och ett äldre kompendium.

Jag tar tacksamt emot synpunkter på kompendiet från både lärare och läsare. Tyrckfel är nästan omöjliga att undvika, men det kan självklart också ha insmugit sig allvarligare fel. Skicka gärna kommentarer till torbjorn@matematik.su.se. Jag kommer så småningom att lägga ut en lista på tryckfel mm på mina webbsidor http://www.matematik.su.se/˜torbjorn.

Kräftriket, St Georgsdagen 2002

Torbjörn Tambour

Innehåll

1 Till att börja med ...

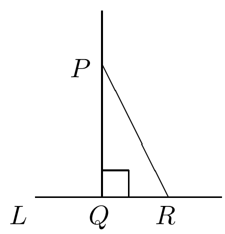
Det här allra första avsnittet innehåller ett antal definitioner och begrepp samt några grundläggande egenskaper hos vinklar och linjer.

1.1 Några definitioner och begrepp

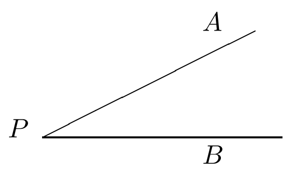
När A och B är två olika punkter så betecknar AB sträckan mellan dem. En sträcka har ingen speciell riktning, så AB och BA är samma sträcka. Två sträckor säges vara *kongruenta* om de är lika långa. Detta betecknas $AB \cong CD$. Kongruensbegreppet kräver inte att vi har valt en längdenhet eftersom vi bara jämför längderna av sträckorna. Vi kommer emellertid att anta att vi har fixerat en längdenhet, så att vi kan mäta längden av sträckor. Längden av AB betecknas $|AB|$. Observera skillnaden mellan $AB = CD$ och $|AB| = |CD|$! Att $AB = CD$ betyder att de två sträckorna är lika, dvs att de består av samma punkter, medan $|AB| = |CD|$ bara betyder att de är lika långa (och alltså kongruenta).

Ibland kommer vi också att tala om *linjen* AB som är den linje som går genom punkterna. Att vi använder samma beteckning för en sträcka som för en linje kommer förhoppningsvis inte att orsaka oklarheter.

Med avståndet från en punkt P till en linje menar vi det kortaste avståndet. Med hjälp av Pythagoras sats (som vi skall bevisa senare) är det lätt att bevisa att det är detsamma som det vinkelräta avståndet: I figuren är PQ vinkelrät mot L och R är en godtycklig punkt på linjen. Då gäller $|PR|^2 = |PQ|^2 + |QR|^2$ och eftersom $|QR|^2 \geq 0$ så får vi $|PR| \geq |PQ|$.



Vinklar betecknas oftast genom att man anger en punkt på vardera vinkelbenet samt vinkelns spets. Vinkeln till höger betecknas alltså vanligen $\wedge APB$. Ibland är det bekvämt att ge en vinkel ett eget namn, som u eller v. Om det inte kan uppstå missförstånd, så betecknar man ibland vinkeln med spets i P med $\wedge P$.

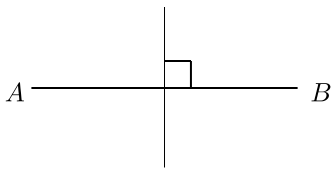


$\wedge APB$ eller $\wedge P$

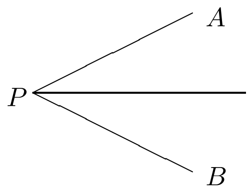
Man säger att två vinklar är kongruenta om de är lika stora, vilket skrivs $\wedge APB \cong \wedge A'P'B'$. Som för sträckor så är detta inte detsamma som att vinklarna är lika. Som mått på vinklars storlek skall vi använda vanliga grader. Ett varv är 360 grader och en rät vinkel är fjärdedelen därav, dvs $90°$.[1] Storleken av vinkeln $\wedge APB$ skriver vi $(\wedge APB)°$.

Kongruens är ett av de fundamentala begreppen i geometrin. Att två geometriska objekt, t ex två trianglar, är kongruenta betyder att de har samma form och storlek. Oftast är det just i samband med trianglar som man talar om kongruens, men det är bekvämt att definiera begreppet även för sträckor och vinklar (kongruens av trianglar skall vi definiera och diskutera i nästa avsnitt). Det är ingen större skada skedd om man råkar säga att två vinklar är lika när man i själva verket menar att de är kongruenta, men det kan vara bra att försöka tänka på vad man säger och menar – i matematiken måste man vara tydlig. Kongruens kommer från ett latinskt ord som betyder sammanfalla eller överensstämma.

En *normal* till en linje (sträcka) är en linje som är vinkelrät mot den givna linjen (sträckan). *Mittpunktsnormalen* till en sträcka AB är den normal som går genom mittpunkten på AB. För alla punkter P på mittpunktsnormalen gäller att $|AP| = |BP|$, vilket är lätt att tro på, men vi skall ändå ge ett litet bevis senare. *Bisektrisen* till en vinkel är en linje eller stråle som delar vinkeln på mitten (bisektris betyder dela i två delar).



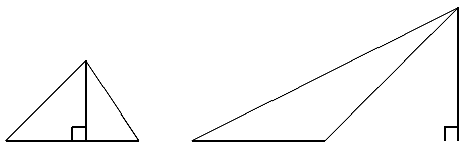
Mittpunktsnormal



Bisektris

Bisektrisen till en vinkel består av de punkter som har samma avstånd till båda vinkelbenen, vilket vi också skall bevisa senare.

En *höjd* i en triangel är slutligen en sträcka som går från ett hörn och är vinkelrät mot motstående sida eller dess förlängning. Höjden faller alltså inte alltid inuti triangeln.



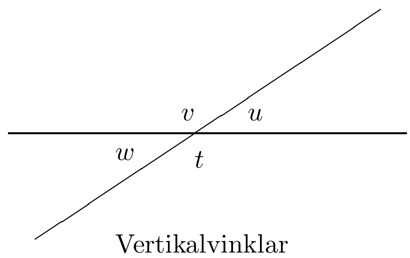
Höjder i två trianglar

[1]Bruket att dela varvet i 360 grader kommer från babylonierna som använde det redan för 4000 år sedan. Talet 360 kan ha att göra med att solen på ett dygn förflyttar sig ungefär 1/360 varv, dvs en grad, bland stjärnorna på himlen (egentligen 1/365 varv, men 360 är lättare att räkna med).

1.2 Skärningar och vinklar mellan linjer

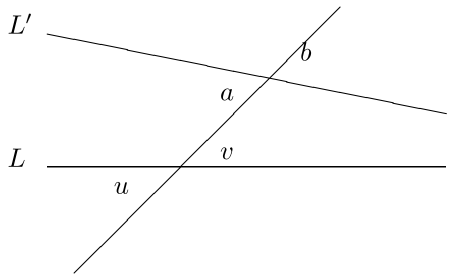
Man säger att två linjer i plane är *parallella* (av grekiskans förled *para-* som kan betyda längs med och *allellon*, varandra) om de inte skär varandra.[2]

När två linjer skär varandra så uppstår fyra vinklar, i figuren u, v, w och t. Vinklarna u och w respektive v och t kallas *vertikalvinklar*. Eftersom $u^\circ + v^\circ = 180^\circ = v^\circ + w^\circ$ så är $u \cong w$. Vertikalvinklar är alltså kongruenta.



Vertikalvinklar

Om två linjer L och L' skärs av en tredje som i nästa figur så kallas den tredje linjen för *transversal.*



Likbelägna vinklar och alternatvinklar

Vinklarna u och a respektive v och b säger man är *likbelägna* medan u och b respektive v och a är *alternatvinklar*. Om L och L' är parallella så är likbelägna respektive alternatvinklar lika stora eftersom de två skärningarna då "ser likadana ut". Omvänt är linjerna parallella om likbelägna vinklar eller alternatvinklar är lika stora, vilket också är ganska uppenbart i en figur. Vi skall inte fördjupa oss mer i varför det är så utan litar på åskådningen, trots att en figur aldrig kan vara ett bevis.

1.3 Matematikens språk

Det krävs en speciell teknik för att läsa matematiska texter. De är "innehållsmättade", dvs fakta och argument kommer tätt, så man måste läsa med efter-

[2]I rummet räcker inte detta som definition. Istället säger man att två linjer är parallella om de löst uttryckt har samma riktning. Linjer i rummet kan ju mycket väl ha olika riktning men ändå inte skära varandra, tänk på en planskild korsning!

tanke. Matematiska texter innehåller naturligtvis många termer och begrepp som är speciella för ämnet, men det vimlar också av ord som i och för sig förekommer i vardagsspråket, men som man skall lägga särskilt märke till när man läser matematik. Ett sådant är *definition*. I en definition fastlägger man betydelsen hos en term eller ett begrepp. När man har fastslagit vad något betyder, så måste man hålla sig till den betydelsen. Det går inte an att definiera t ex begreppet cirkel på ett visst sätt och sedan använda det lite löst om någon annan geometrisk figur. En definition är inte sann eller falsk, utan helt enkelt ett slags konvention.

Matematikens produkter kallas *satser*. I en sats brukar det finnas ett antal förutsättningar och sedan ett påstående om vad som gäller om förutsättningarna är uppfyllda. En sats följs (eller föregås, beroende på hur man skriver sin text) alltid av ett bevis, som är ett logiskt bindande resonemang. Matematiken som sådan har ingen plats för tro eller tyckande. Man kan tro aldrig så mycket på ett påstående, men så länge det inte är bevisat, så är det ingen sats. Däremot kan naturligtvis matematiker tro att det ena eller det andra påståendet är sant eller falskt. Ett enstaka exempel är inget bevis. Det räcker således inte att mäta i tjugo rätvinkliga trianglar för att bevisa Pythagoras sats; man måste visa att påståendet i Pythagoras sats gäller för *alla* rätvinkliga trianglar. Å andra sidan räcker det med ett enda exempel i vilket ett påstående inte gäller för att vederlägga det. Ett sådant förödande exempel kallas ett *motexempel*.

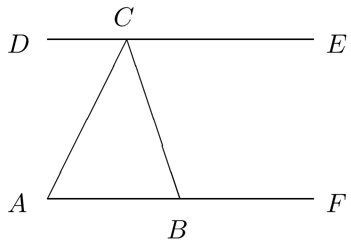
I ett bevis för ett matematiskt påstående använder man i allmänhet resultat som man har bevisat tidigare. På det sättet byggs hela teorin upp så att säga nerifrån, inte olikt ett hus som muras upp sten för sten. Vi skall säga lite mer om den logiska uppbyggnaden av geometrin sist i kompendiet och även diskutera vilka grundvalar den vilar på. Bevis kan vara korta och kärnfulla eller långa och trassliga och man måste läsa dem med stor omsorg, kanske genom att föra anteckningar vid sidan av. Läser man geometri är det dessutom nödvändigt att rita figurer. Bevisen är matematikens själ – utan dem blir matematiken bara en samling regler utan sammanhang och inbördes samband. Man kan inte hoppa över bevisen, även om det känns tungt att ta sig igenom dem. Utan dem kommer man aldrig att förstå matematiken.

2 Trianglar

Triangeln med hörn A, B och C betecknas $\triangle ABC$.

2.1 Triangelns vinkelsumma

Det första vi skall göra är att diskutera triangelns vinkelsumma.



Linjen DE i figuren är parallell med sidan AB i $\triangle ABC$ och går genom hörnet C. Vinklarna $\wedge ACD$ och $\wedge CAB$ är alternatvinklar och alltså lika stora. Av precis samma skäl är $\wedge ABC$ och $\wedge ECB$ lika stora. Summan av vinklarna i $\triangle ABC$ är således

$$
\begin{aligned}
&(\wedge CAB)^\circ + (\wedge ACB)^\circ + (\wedge ABC)^\circ \\
&= (\wedge ACD)^\circ + (\wedge ACB)^\circ + (\wedge BCE)^\circ = 180^\circ.
\end{aligned}
$$

Att vinklarna i en triangel tillsammans blir ett halvt varv borde inte vara obekant för någon och beviset är ju också både enkelt och elegant. Men det finns anledning att stanna upp ett litet ögonblick och fundera över det. Är beviset verkligen vattentätt eller finns det luckor? En lucka är förstås att vi har använt egenskaper hos alternatvinklar som vi inte har bevisat. En annan som kanske är svårare att se gäller linjen DE. Hur vet vi att den finns? Med andra ord: Hur vet vi att det genom en given punkt går att dra en linje som är parallell med en given linje? Om det nu alltid går att dra en sådan linje, så kan man vidare fråga sig om det går att dra flera. Vilken av dem skall man i så fall välja? Att det går att dra en och endast en sådan linje är en av grundförutsättningarna i Euklides uppbyggnad av geometrin i Elementa, närmare bestämt är det hans femte postulat, parallellpostulatet. Vi skall säga lite mer om det i det sista avsnittet i kompendiet. Finns det ännu fler luckor?

Om man förlänger en av sidorna, t ex AB som i figuren, så uppstår en *yttervinkel* $\wedge CBF$ vid hörnet B (det finns en till yttervinkel vid B som man får genom att förlänga BC). Eftersom $(\wedge ABC)^\circ + (\wedge CBF)^\circ = 180^\circ$ och hela triangelns vinkelsumma också är 180°, så måste

$$(\wedge CBF)^\circ = (\wedge CAB)^\circ + (\wedge BCA)^\circ,$$

ett samband som brukar kallas yttervinkelsatsen.

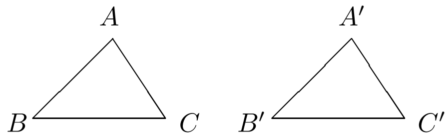
2.2 Kongruens

Man säger att två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ är *kongruenta* om motsvarande sidor och vinklar är kongruenta:

$$AB \cong A'B',\ AC \cong A'C',\ BC \cong B'C',$$

$$\wedge A \cong \wedge A',\ \wedge B \cong \wedge B',\ \wedge C \cong \wedge C'.$$

Att två trianglar är kongruenta betyder alltså att de har samma form och storlek. Vi skall använda beteckningen $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ för kongruens.



Kongruenta trianglar

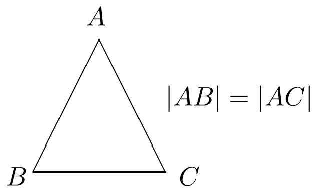
Definitionen av kongruens innehåller sex villkor, men det räcker med att vissa av dem (i vissa kombinationer) är uppfyllda för att resten också skall vara det. Om två sidor och vinkeln mellan dem är givna, så finns det bara ett sätt att komplettera till en triangel. Likadant förhåller det sig om två vinklar och sidan mellan dem är givna, liksom om alla tre sidorna är givna. Dessa observationer brukar kallas de tre kongruensfallen:

> *Första kongruensfallet* (ofta kallat SVS, sida-vinkel-sida): Om i två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ och $\wedge A \cong \wedge A'$, så är $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
>
> *Andra kongruensfallet* (SSS): Om i två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ och $BC \cong B'C'$, så är $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
>
> *Tredje kongruensfallet* (VSV): Om i två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $AB \cong A'B'$, $\wedge A \cong \wedge A'$ och $\wedge B \cong \wedge B'$, så är $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Det kan vara svårt att hålla reda på vilket fall som är vilket i nummerordningen, så förkortningarna SVS, SSS och VSV är ganska användbara. Lägg märke till att vi inte har bevisat kongruensfallen, utan bara motiverat dem med ett intuitivt resonemang.

2.3 Likbenta trianglar

Vi skall omedelbart göra bruk av kongruensfallen och bevisa några saker om likbenta trianglar. I en likbent triangel är två av sidorna, kallade benen, lika långa. Den tredje sidan kallas bas. Intuitivt är det väl klart att basvinklarna $\wedge B$ och $\wedge C$ är lika stora, men hur kan man bevisa det? Jo, här får vi direkt användning av första kongruensfallet SVS. För låt oss titta på två kopior av triangeln, $\triangle ABC$ och $\triangle ACB$.

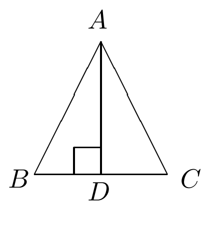


Toppvinkeln $\wedge A$ är densamma i båda och enligt förutsättningen är $AB \cong AC$, $AC \cong AB$, så SVS ger $\triangle ABC \cong \triangle ACB$. Men då är alla vinklar lika, så $\wedge B \cong \wedge C$. Det här resultatet brukar kallas *basvinkelsatsen.* Om man omvänt vet att basvinklarna i en triangel är lika stora, så kan man använda tredje kongruensfallet VSV för att bevisa att triangeln är likbent. Tänk igenom det som övning! Basvinkelsatsen finns i Euklides Elementa, men med ett betydligt mer komplicerat bevis än ovanstående, som härstammar från Pappos (verksam i Alexandria ca 340 e Kr). I Euklides bevis finns en figur som liknar en bro och beviset kallas ibland för *pons asinorum*, åsnebron – den som inte kan ta sig över bron måste vara en åsna.

I den likbenta triangeln $\triangle ABC$ (där $AB \cong AC$) drar vi höjden AD mot BC från A . Eftersom $\wedge ADC$ och $\wedge ADB$ är räta så är

$$(\wedge CAD)^\circ = 90^\circ - (\wedge DCA)^\circ = 90^\circ - (\wedge DBA)^\circ = (\wedge BAD)^\circ,$$

där den andra likheten är basvinkelsatsen. Tydligen är AD bisektris till $\wedge A$. Kongruensfallet VSV (eller SVS) ger nu att $\triangle ADC \cong \triangle ADB$ och speciellt är $BD \cong CD$. Alltså är AD även mittpunktsnormal till BC.

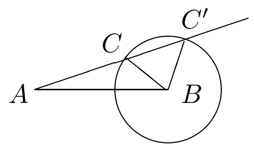


I det inledande avsnittet nämnde vi att mittpunktsnormalen till en sträcka BC består av de punkter som har samma avstånd till B och C. Vi kan nu bevisa det: Om A är en punkt på mittpunktsnormalen (se figuren ovan igen) och D normalens fotpunkt, så är $\triangle ADC \cong \triangle ADB$ enligt första kongruensfallet SVS, ty AD är gemensam, $BD \cong CD$ eftersom D är mittpunkt på BC och båda vinklarna $\wedge ADB$ och $\wedge ADC$ är räta. Alltså är $AB \cong AC$. Antag å andra sidan att punkten A uppfyller $|AB| = |AC|$. Då är $\triangle ABC$ likbent och enligt ovan ligger A på mittpunktsnormalen till BC.

Allt det här kan tyckas vara mycket väsen för ingenting eller i alla fall väldigt lite, men det är viktigt att någon gång fundera igenom vad man egentligen baserar sina mer eller mindre intuitiva resonemang på.

2.4 Ett falskt kongruensfall

Det finns ett lömskt "kongruensfall" som ibland dyker upp i övningsuppgifter, nämligen SSV, sida-sida-vinkel: Är en triangel bestämd av två sidor och en vinkel som inte är vinkeln mellan de två givna sidorna? Vi undersöker. Antag att AB och BC är de givna sidorna och $\wedge A$ den givna vinkeln: Dra en cirkel med medelpunkt i B och radie BC samt en linje genom A som bildar den givna vinkeln med AB. Tre saker kan nu inträffa:



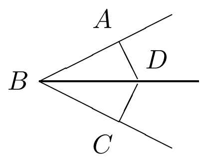
1. Linjen skär cirkeln i två punkter som i figuren. I så fall finns det två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle ABC'$. Lägg märke till att den förra är trubbvinklig och den senare spetsvinklig vid C respektive C'.

2. Linjen tangerar cirkeln, dvs skär cirkeln i en enda punkt C (punkterna C och C' har sammansmält). Då finns det precis en triangel som dessutom är rätvinklig vid C (vi skall se senare i kompendiet att tangenten AC är vinkelrät mot radien BC).

3. Linjen skär inte cirkeln och då finns ingen triangel alls.

Om man vet att för två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ och $\wedge A \cong \wedge A'$, så är det alltså inte säkert att de är kongruenta, utan det finns två möjligheter som i fall 1 ovan.

Vi kan nu också bevisa att bisektrisen till en vinkel består av de punkter som har samma (vinkelräta) avstånd till vinkelbenen. Låt BD vara bisektris till $\wedge B$ och A respektive C två punkter på vinkelbenen sådana att $\wedge BAD$ och $\wedge BCD$ är räta. Då är $\wedge ABD \cong \wedge DBC$ och eftersom både $\wedge BCD$ och $\wedge BAD$ är räta, så får vi $\wedge BDA \cong \wedge BDC$. Sidan BD är gemensam, så VSV ger $\triangle BDA \cong \triangle BDC$. Alltså är $|AD| = |CD|$.



Omvänt, antag att D är en punkt som har samma (vinkelräta) avstånd till vinkelbenen, $|AD| = |CD|$. I trianglarna $\triangle BDA$ och $\triangle BDC$ har vi $AD \cong CD$, $BD \cong BD$ och $\wedge BAD \cong \wedge BCD$ (båda är räta), så vi har ett SSV-fall. Närmare bestämt har vi fall 2 i SSV, så vi har kongruens trots allt, $\triangle BDA \cong \triangle BDC$, varför $\wedge ABD \cong \wedge DBC$ och D ligger på bisektrisen. (Ett annat sätt att visa att trianglarna är kongruenta är att använda Pythagoras sats.)

2.5 Likformighet

I förra avsnittet pratade vi om det viktiga begreppet kongruens mellan trianglar, som alltså betyder att de har samma form och storlek. Två trianglar som bara har samma form, men inte nödvändigtvis samma storlek säges vara *likformiga*. Den exakta definitionen av begreppet likformighet ser ut så här:

Två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ är likformiga om

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} \quad (*)$$

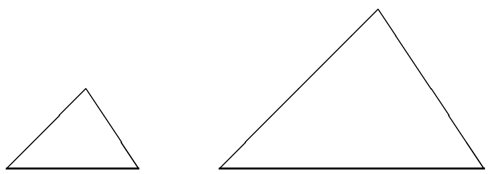
och

$$\wedge A \cong \wedge A', \quad \wedge B \cong \wedge B', \quad \wedge C \cong \wedge C'.$$

Likformighet betecknas

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Förhållandet $(*)$ mellan sidorna kan man kalla *likformighetsskalan*. Om den skulle vara lika med 1, så är trianglarna kongruenta.



Likformiga trianglar

Precis som för kongruens så räcker det att vissa av villkoren i definitionen är uppfyllda för att garantera att trianglarna är likformiga. Om två av sidparen har samma förhållande och vinklarna mellan dem är kongruenta, så ser trianglarna frånsett storleken likadana ut och är alltså likformiga. Om alla tre sidparen har samma förhållande så måste också trianglarna ha samma form och samma gäller om alla tre vinkelparen är kongruenta. Dessa observationer ger oss tre likformighetsfall:

> *Första likformighetsfallet* (SVS): Om i två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller $|AB|/|A'B'| = |AC|/|A'C'|$ och $\wedge A \cong \wedge A'$, så är $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Andra likformighetsfallet (SSS): Om i två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller $|AB|/|A'B'| = |AC|/|A'C'| = |BC|/|B'C'|$, så är $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

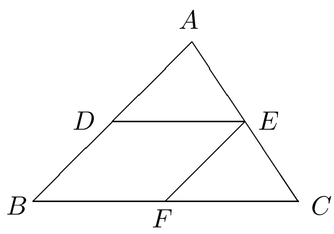
Tredje likformighetsfallet (VVV): Om i två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller $\wedge A \cong \wedge A', \wedge B \cong \wedge B', \wedge C \cong \wedge C'$, så är $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Lägg märke till att det i VVV räcker med att man vet att två av vinkelparen är kongruenta. Att det tredje också består av kongruenta vinklar följer ju i så fall av att triangelns vinkelsumma är 180°.

Intuitivt är väl likformighetsfallen uppenbara, men håll i minnet att vi inte har bevisat dem. Likformighet är ett betydligt mer komplicerat begrepp än kongruens. Detta har att göra med att vi nu jämför förhållanden mellan längder av sträckor och inte bara vill veta om de är lika långa. De stora svårigheterna uppstår när likformighetsskalan är ett irrationellt tal. I Elementa införs likformighet senare än kongruens och först efter att Euklides har infört en teori för irrationella storheter.

2.6 Topptriangelsatsen

Ett ofta förkommande fall av likformighet uppstår som i figuren när en linje skär av en *topptriangel* $\triangle ADE$ i en triangel $\triangle ABC$. Om DE är parallell med BC, så är $\wedge ABC$ och $\wedge ADE$ kongruenta eftersom de är likbelägna. På samma sätt får vi $\wedge ACB \cong \wedge AED$ och VVV ger att $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Detta kallas *topptriangelsatsen*



I den här framställningen betraktar vi alltså topptriangelsatsen som en konsekvens av likformighetsfallet VVV. I mer noggranna framställningar brukar man emellertid göra tvärtom och först bevisa topptriangelsatsen och därefter likformighetsfallen med hjälp av denna. Låt oss dock ge ett bevis i ett enkelt fall som är oberoende av likformighetsfallen. Antag att punkterna D och E delar AB respektive AC på mitten. Drag en linje från E parallell med sidan AB och beteckna skärningspunkten med BC med F. Eftersom AB och EF är parallella, så är $\wedge BAC \cong \wedge FEC$ och då DE och BC också är parallella, så är $\wedge ACB \cong \wedge AED$. Vidare är $|AE| = |EC|$, så kongruensfallet SVS ger att $\triangle ADE \cong \triangle EFC$, varför $|DE| = |FC|$. Fyrhörningen $BFED$ är en parallellogram och enligt avsnitt 2.11 är $|DE| = |BF|$. Alltså är $|DE| = |BC|/2$ och

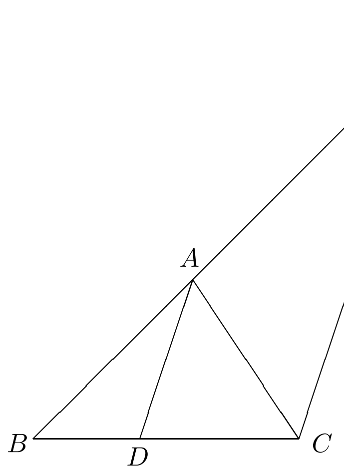
$\triangle ADE \sim \triangle ABC$. På liknande sätt kan man bevisa topptriangelsatsen då likformighetsskalan är ett rationellt tal, men det uppstår svårigheter när den är irrationell. Vi skall inte fördjupa oss i det.

2.7 Bisektrissatsen

Drag bisektrisen från A i $\triangle ABC$ och beteckna dess skärningspunkt med sidan BC med D. Ritar man en figur så ser man att ju större förhållandet $|AB|/|AC|$ är, desto större bör $|BD|/|CD|$ vara. Bisektrissatsen ger ett exakt uttryck för detta, den säger nämligen att

$$\frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Beviset är en trevlig tillämpning av topptriangelsatsen. Drag en linje genom C som är parallell med bisektrisen AD. Beteckna dess skärningspunkt med förlängningen av sidan AB med E (varför skär dessa varandra?). Triangeln $\triangle ABD$ är topptriangel i $\triangle EBC$. Vi har $\wedge BAD \cong \wedge BEC$ eftersom de är likbelägna (transversalen BE skär de parallella linjerna AD och EC) och $\wedge DAC \cong \wedge ECA$ eftersom de är alternatvinklar (här är istället AC transversalen som skär AD och EC). Men AD är bisektris till $\wedge A$, så $\wedge ECA \cong \wedge DAC \cong \wedge BAD \cong \wedge BEC$.



Enligt basvinkelsatsens omvändning är tydligen $\triangle EAC$ likbent, $|AE| = |AC|$. Likformigheten $\triangle ABD \sim \triangle EBC$ ger

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|BD|}.$$

Men $|BE| = |AB| + |AE| = |AB| + |AC|$ och $|BC| = |BD| + |CD|$, så detta ger

$$\frac{|AB| + |AC|}{|AB|} = \frac{|BD| + |CD|}{|BD|} \quad \text{eller} \quad \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|BD|}$$

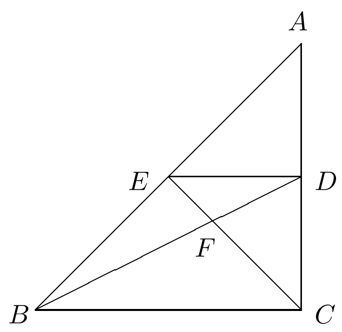
om vi subtraherar 1 från båda leden. Beviset är klart.

2.8 Medianer och triangelns tyngdpunkt

En *median* i en triangel är en sträcka som går från ett hörn till motstående sidas mittpunkt. Vi skall bevisa att de tre medianerna i en triangel skär varandra i en punkt. I figuren nedan är BD och CE två medianer och F deras skärningspunkt (fundera igenom varför vi kan vara säkra på att medianerna skär varandra). Vi drar sträckan ED. Punkterna D och E är mittpunkter på AC respektive AB, så

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{1}{2}.$$

Eftersom vinkeln $\wedge A$ är gemensam, så ger likformighetsfallet SVS att $\triangle AED \sim \triangle ABC$.



Alltså är $\wedge AED \cong \wedge ABC$ och då är ED parallell med sidan BC. Av detta följer i sin tur att $\wedge DEC \cong \wedge BCE$ och $\wedge BDE \cong \wedge CBD$ eftersom de är alternatvinklar. Enligt likformighetsfallet VVV är $\triangle BCF \sim \triangle DEF$ (vi hade även kunnat utnyttja att $\wedge EFD \cong \wedge BFC$ eftersom de är vertikalvinklar). Nu är

$$\frac{|ED|}{|BC|} = \frac{1}{2}$$

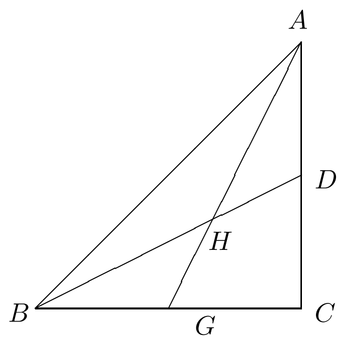
eftersom likformighetsskalan mellan $\triangle AED$ och $\triangle ABC$ är $1/2$, så

$$\frac{|EF|}{|CF|} = \frac{|DF|}{|BF|} = \frac{|ED|}{|BC|} = \frac{1}{2}.$$

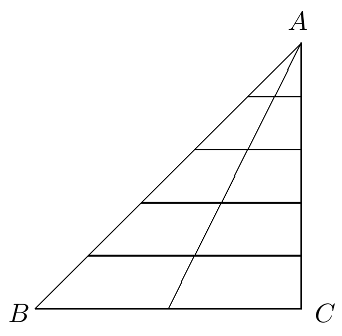
I andra ord kan vi uttrycka detta som att punkten F delar medianerna BD och CE i förhållandet $1 : 2$.

Betrakta nu den tredje medianen AG. Den skär BD i en punkt H som även den måste dela BD i förhållandet $1 : 2$ – vi kan ju nämligen upprepa hela resonemanget ovan med AG och BD istället. Men detta betyder att H och F

är *samma punkt*, dvs medianerna skär varandra i en punkt F som delar dem i förhållandet $1:2$. (Gåta: Hur följer det av detta att AF är en tredjedel av hela medianen AG?)



Medianernas skärningspunkt har en fysikalisk betydelse. Betrakta en kropp som påverkas av tyngdkraften. Tyngdkraften påverkar varje liten del av kroppen, men om man analyserar situationen enligt mekanikens lagar, så finner man att man kan ersätta alla dessa små krafter med en enda resulterande kraft som angriper i en speciell punkt, kallad *tyngdpunkten* (ibland masscentrum). För en triangel är tyngdpunkten just medianernas skärningspunkt, vilket redan Arkimedes visste. Det är inte svårt att inse varför det är så. Dela nämligen in triangeln i smala strimlor parallella med en av sidorna, säg BC. Tyngdpunkten på en sådan strimla bör ligga mitt på strimlan, dvs på medianen mot BC. Tyngdpunkten bör alltså ligga på alla tre medianerna.

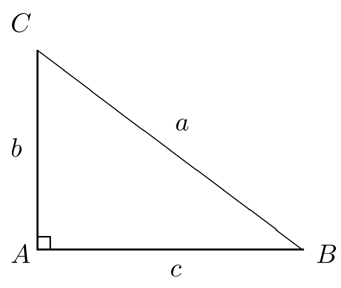


2.9 Pythagoras sats

I det här avsnittet skall vi anta att $\triangle ABC$ är rätvinklig vid A och vi använder beteckningarna $|AB| = c, |AC| = b, |BC| = a$. Sidan BC som står mot den räta vinkeln kallas *hypotenusa* och de två andra sidorna kallas *kateter*. Namnen på sidorna kommer från två grekiska ord med betydelsen ”som sträcker sig under” respektive lodlinje. Geometrins mest kända resultat är förmodligen *Pythagoras sats*, som säger att kvadraten på hypotenusan är lika med summan av kvadraterna på kateterna:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

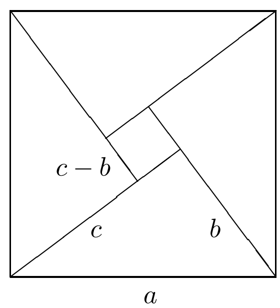
Det finns oräkneligt många mer eller mindre olika bevis för Pythagoras sats och vi skall diskutera några av dem.



Det första beviset är mycket åskådligt. Tag fyra kopior av triangeln och lägg dem i form av en kvadrat som i figuren. I mitten uppstår det ett kvadratiskt hål med sidan $c - b$. Arean av hela kvadraten kan å ena sidan skrivas som a^2 och å andra sidan som $(b-c)^2 + 4 \cdot bc/2$ eftersom $\triangle ABC$ har arean $bc/2$. Alltså är

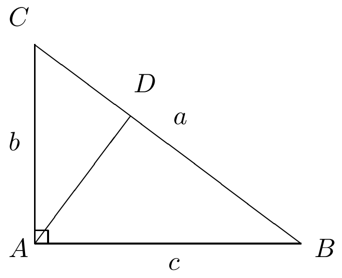
$$\begin{aligned} a^2 &= (c-b)^2 + 4 \cdot bc/2 \\ &= c^2 - 2bc + b^2 + 2bc \\ &= b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Det här beviset härrör från en indisk matematiker, Bhaskara, verksam omkring 1150 e Kr. Hans enda kommentar till figuren är “Se!”.



Det finns anledning att stanna upp och fundera över några detaljer i beviset. *Kan* man säkert lägga ihop de fyra trianglarna som en kvadrat? Varför är hålet i mitten kvadratiskt? Var har vi använt att triangeln är rätvinklig? Läsaren uppmanas att själv tänka igenom dessa frågor.

Det andra beviset använder likformighet. I figuren har vi dragit höjden från hörnet A mot BC. Triangeln $\triangle ADC$ är rätvinklig eftersom AD är en höjd. Vinkeln $\wedge C$ är gemensam för $\triangle ABC$ och $\triangle ADC$, varför de är likvinkliga och alltså likformiga.



Detta ger

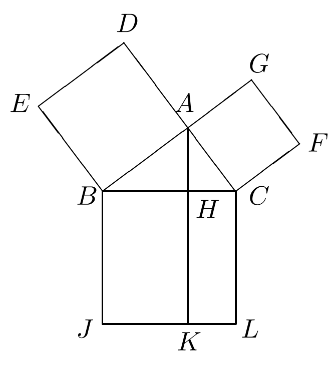
$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|} \quad \text{dvs} \quad b^2 = |AC|^2 = |BC| \cdot |CD| = a \cdot |CD|.$$

På samma sätt får vi $c^2 = a \cdot |BD|$ och addition ger

$$b^2 + c^2 = a \cdot |CD| + a \cdot |BD| = a(|CD| + |BD|) = a \cdot |BC| = a^2.$$

Beviset ser ganska oskyldigt ut, men är mer komplicerat än man tror eftersom det bygger på likformighet.

Det tredje och sista beviset för Pythagoras sats som vi skall titta på är Euklides bevis i Elementas första bok (Proposition 47), som har drabbat generationer av skolelever. Många har drömt mardrömmar om det inför realexamen, men resonemanget är faktiskt mycket vackert. I figuren har vi ritat ut kvadrater på triangelns sidor.



AH är höjden från A och K är dess skärningspunkt med JL. Vi börjar med att konstatera att vinklarna $\wedge EBC$ och $\wedge ABJ$ är lika eftersom de består av $\wedge ABC$ plus en rät vinkel ($\wedge EBA$ respektive $\wedge CBJ$). Vidare är $|EB| = |BA|$ och $|BC| = |BJ|$, så trianglarna $\triangle EBC$ och $\triangle ABJ$ är kongruenta enligt SVS (man får ju $\triangle ABJ$ genom att vrida $\triangle EBC$ $90°$ medurs kring punkten B). Alltså har de samma area. Vi skall beteckna area av en figur (triangel, rektangel, ...) Δ med $|\Delta|$. Vi har således $|\triangle EBC| = |\triangle ABJ|$. Som bas i $\triangle EBC$ väljer vi sidan BE. Höjden är då sträckan AB (lägg huvudet på sned eller vrid papperet för att se detta!). Då blir tydligen

$$|\triangle EBC| = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |AB| = \frac{1}{2}|AB|^2 = \frac{1}{2}|ADEB|,$$

ty $|BE| = |AB|$.

Som bas i $\triangle ABJ$ väljer vi BJ och då blir höjden sträckan BH. Alltså

$$|\triangle ABJ| = \frac{1}{2} \cdot |BJ| \cdot |BH| = \frac{1}{2}|BJKH|.$$

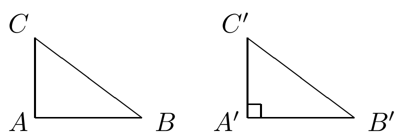
Det följer nu att $|ADEB| = |BJKH|$. På samma sätt visar man att $|CFGA| = |HKLC|$. Adderar vi så får vi

$$b^2 + c^2 = |CFGA| + |ADEB| = |HKLC| + |BJKH| = |BJLC| = a^2.$$

Anledningen till att Euklides väljer det här beviset snarare än det som är vårt andra är förmodligen att det här inte använder likformighet, som behandlas först senare i Elementa. Beviset är en liten juvel, men Euklides har faktiskt bara skyfflat problemet med likformigheten under mattan: areabegreppet är nämligen inte så okomplicerat som man kunde tro. I själva verket är de två senare bevisen nästan lika: Formlerna $b^2 = a \cdot |CD|$ och $c^2 = a \cdot |BD|$ betyder ju precis att $|ADEB| = |BJKH|$ respektive $|CFGA| = |HKLC|$.

Omvändningen till Pythagoras sats

I en rätvinklig triangel med hypotenusa a och kateter b, c gäller $a^2 = b^2 + c^2$. Men finns det några andra trianglar som uppfyller detta? Eller måste en triangel i vilken gäller $a^2 = b^2 + c^2$ vara rätvinklig? Låt $\triangle ABC$ vara en triangel sådan att $a^2 = b^2 + c^2$, där $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Betrakta en annan triangel $\triangle A'B'C'$, där vinkeln vid A' är rät och $|A'C'| = b, |A'B'| = c$.



Enligt Pythagoras sats på $\triangle A'B'C'$ är

$$|B'C'|^2 = b^2 + c^2 = a^2 = |BC|^2,$$

så $|B'C'| = |BC|$. Alltså har trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ samma sidor och är kongruenta enligt SSS. Men då är även $\triangle ABC$ rätvinklig vid A. Pythagoras sats gäller således bara i rätvinkliga trianglar.

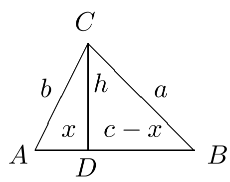
Läs ovanstående en gång till och lägg märke till logiken: Om en triangel är rätvinklig så gäller Pythagoras sats i den. Omvänt, om Pythagoras sats gäller, så är triangeln rätvinklig. Dessa två påståenden betyder inte samma sak, de går så att säga åt olika håll.

Historisk kommentar

När Pythagoras levde är oklart, men ofta anges 585-500 f Kr. Han var född på ön Samos i den grekiska övärlden, men var tvungen att fly till Kroton i södra Italien, där han grundade en filosofskola som kallas den *pythagoreiska skolan*. Pythagoréerna sysslade bl a med talmystik och har spelat en stor roll i idéhistorien. Pythagoras sats var känd minst 1000 år före Pythagoras, bl a i Babylonien under Hammurabis tid. Det är tänkbart att Pythagoras gjorde studieresor till Orienten och lärde känna satsen där och kanske var han i alla fall den förste som bevisade den.

2.10 Herons formel

En triangels area är bestämd av sidorna, men exakt hur ser sambandet ut? Vi skall härleda en vacker formel för arean. Härledningen är egentligen en nyttig övning i algebra snarare än i geometri. I triangeln $\triangle ABC$ sätter vi $|AB| = c, |AC| = b, |BC| = a$. Drag höjden från C mot AB och beteckna fotpunkten med D. Sätt $h = |CD|, x = |AD|$. Då är alltså $|BD| = c - x$ och arean av $\triangle ABC$ är $T = ch/2$.



Trianglarna $\triangle ADC$ och $\triangle CDB$ är rätvinkliga och Pythagoras sats ger

$$b^2 = x^2 + h^2 \quad \text{respektive} \quad a^2 = h^2 + (c - x)^2.$$

Subtraktion av dessa ger $a^2 - b^2 = (c - x)^2 - x^2 = c^2 - 2cx$, alltså

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}. \qquad (*)$$

Vi får

$$\begin{aligned}
h^2 &= b^2 - x^2 = (b+x)(b-x) \\
&= (b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c})(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}) \\
&= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2c} \cdot \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2c} \\
&= \frac{(b+c)^2-a^2}{2c} \cdot \frac{a^2-(b-c)^2}{2c} \\
&= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}.
\end{aligned}$$

Lägg märke till hur nyttig och användbar konjugatregeln är! Vi inför nu beteckningen p för halva omkretsen av $\triangle ABC$, dvs $p = (a+b+c)/2$. Då är $b+c-a = 2(p-a)$ osv och insättning ger

$$h^2 = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4c^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}.$$

Slutligen får vi uttrycket för arean:

$$T = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}c \cdot \frac{\sqrt{4p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

vilket är *Herons formel*. Här har vi antagit att punkten D ligger på AB och inte på dess förlängning. Beviset i det senare fallet är helt analogt och det överlämnas till läsaren att fylla i detaljerna.

Formeln $(*)$ har en konsekvens som kan vara värd att nämna. I figuren är ju $x/b = \cos(\wedge A)^\circ$, som ger

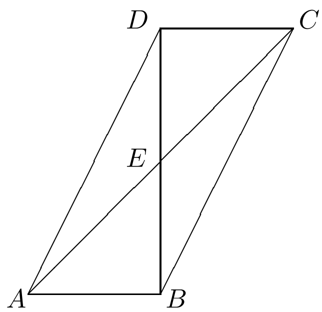
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\wedge A)^\circ,$$

alltså cosinussatsen.

Heron var grekisk matematiker verksam i Alexandria under slutet av det första århundradet e Kr. Han sysslade med matematik, astronomi, fysik och teknik och är känd bl a för en skiss av historiens första ångmaskin, Herons ångkula. Herons formel härstammar från Arkimedes (287-212 f Kr).

2.11 Parallellogrammer

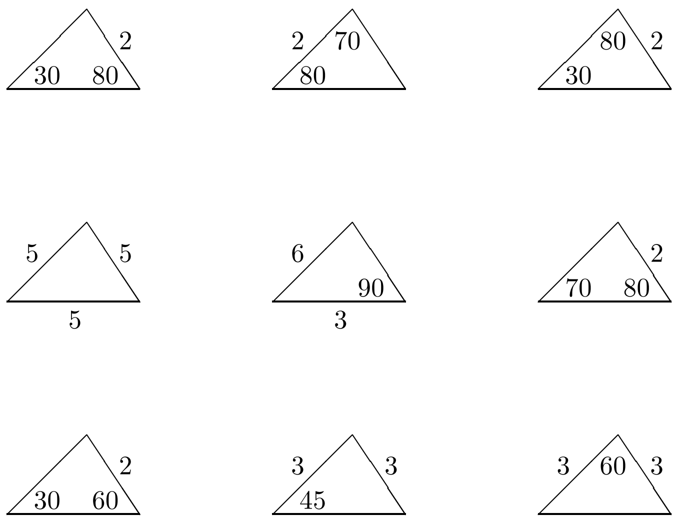
En parallellogram är en fyrhörning i vilken motstående sidor (i figuren AD och BC respektive AB och CD) är parallella. Drag diagonalen AC. Eftersom AB och CD är parallella så är alternatvinklarna $\wedge BAC$ och $\wedge ACD$ kongruenta och på samma sätt får vi att $\wedge DAC \cong \wedge ACB$. Alltså är $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ enligt VSV eftersom sidan AC är gemensam. Med andra ord är motstående sidor i en parallellogram lika långa och motstående vinklar lika stora. Drag nu båda diagonalerna AC och BD och beteckna deras skärningspunkt med E. Som ovan får vi $\wedge EAB \cong \wedge ECD$ och $\wedge ABE \cong \wedge CDE$. Eftersom $|AB| = |CD|$, så ger VSV att $\triangle ABE \cong \triangle CDE$. Alltså är $|AE| = |CE|$ och $|BE| = |DE|$, dvs diagonalerna delar varandra mitt itu.



En rektangel är en fyrhörning i vilken alla vinklar är räta. En kvadrat är en rektangel i vilken alla sidor är lika långa.[3]

2.12 Övningar

1. Ange vilka trianglar som är kongruenta respektive likformiga. Vinklarna är i grader.



[3]Ibland hör man talas om absurda diskussioner om huruvida en kvadrat är en rektangel eller om begreppet rektangel är reserverat för rätvinkliga fyrhörningar med två olika långa sidor. Saken är dock mycket enkel: en kvadrat är en speciell rektangel.

2. I $\triangle ABC$ är D en punkt på sidan AB. Måste $\triangle ABC$ vara likbent ($|AC| = |BC|$) om

   a) $\wedge ACD \cong \wedge DCB$ och $|DB| = |CD|$?

   b) $\wedge ADC \cong \wedge BDC$ och $|AD| = |DB|$?

   c) $\wedge ACD \cong \wedge DBC$ och $\wedge ADC \cong \wedge BDC$?

   d) $\wedge ACD \cong \wedge DCB$ och $|AD| = |DB|$? (Svårare, man måste nog använda det falska kongruensfallet eller bisektrissatsen.)

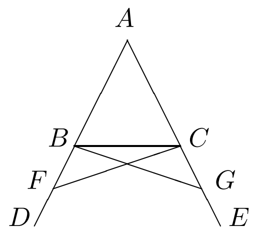
   Bevisa eller ge motexempel!

3. Nedan finns Euklides bevis för basvinkelsatsen (Proposition 5 i Elementas första bok), alltså *pons asinorum*. Läs beviset, tänk igenom det och jämför med Pappos bevis i texten.

   Givet är alltså en triangel $\triangle ABC$ sådan att $|AB| = |AC|$. Förläng AB och AC till D respektive E och avsätt en godtycklig punkt F mellan B och D. Avsätt G på CE så att $|AF| = |AG|$. Enligt SVS är $\triangle AFC \cong \triangle AGB$, vilket ger

   $$\wedge AFC \cong \wedge AGB, \quad \wedge ACF \cong \wedge ABG \quad \text{och} \quad |CF| = |BG|.$$

   Vidare är $|BF| = |CG|$, så SVS igen ger $\triangle BFC \cong \triangle CGB$ eftersom $|CF| = |BG|$ och $\wedge BFC \cong \wedge CGB$. Men då är speciellt $\wedge FCB \cong \wedge GBC$, vilket tillsammans med $\wedge ABG \cong \wedge ACF$ ger det efterlängtade $\wedge ABC \cong \wedge ACB$.



4. När man drar medianerna i en triangel uppstår sex små trianglar. Bevisa att de har samma area.

5. I $\triangle ABC$ är D en punkt på AB och E en punkt på BC. Vi har $\wedge DEB \cong \wedge DBE$, $|AD| = 4, |BD| = 2, |BE| = 3$ och $|CE| = 6$. Beräkna $|AC|$.

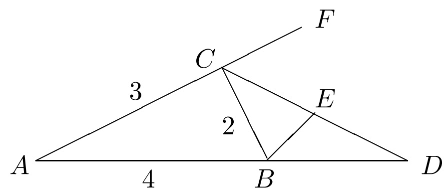
6. I $\triangle ABC$ är $\wedge A$ rät. En kvadrat $ADEF$ är inskriven i triangeln så att D ligger på AB, E på BC och F på AC. Bestäm kvadratens sida om $|AB| = 8, |AC| = 4$.

7. I $\triangle ABC$ ligger D på AB och E på AC. I vilket/vilka av följande två fall kan man säkert säga att $|AD| = |AE|$? Bevisa eller ge ett motexempel.

   a) $|BD| = |CE|$, $\wedge BCD \cong \wedge CDE$

   b) $|BD| = |CE|$, $\wedge BCD \cong \wedge A$.

8. Beräkna $|BD|$ i figuren.



$\wedge BCE \cong \wedge CEB \cong \wedge FCE$

9. I $\triangle ABC$ är $|AB| = |AC| = 10$ och $|BC| = 12$. Genom A går tre linjer som delar $\wedge A$ i fyra kongruenta delar. Bestäm längderna av de fyra delar som BC delas i av dessa linjer.

10. I $\triangle ABC$ är $\wedge C$ rät. D är mittpunkten på AB. Antag att $|BC| = 6$ och att triangelns area är 24. Beräkna $|DC|$.

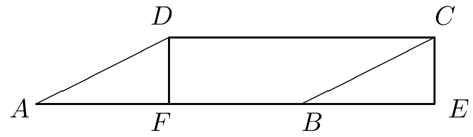
11. I $\triangle ABC$ är $|AB| = 3, |BC| = 5$ och $|AC| = 4$. Bestäm längden av bisektrisen från B.

12. I $\triangle ABC$ är $\wedge A$ rät. Punkten D är mittpunkt på AB och $|BC| = 5, |CD| = 4$. Hur långa är AB och AC?

13. I en fyrhörning är motstående vinklar lika stora. Visa att fyrhörningen är en parallellogram.

14. I en fyrhörning är motstående sidor lika långa. Visa att fyrhörningen är en parallellogram.

15. Bevisa att i parallellogrammen $ABCD$ gäller *parallellogramlagen* $|AC|^2 + |BD|^2 = 2|AB|^2 + 2|AD|^2$.



Ledning: Använd Pythagoras sats på $\triangle AFD$ och $\triangle BEC$.

16. I figuren ovan låter vi a vara längden av basen AB och h höjden, dvs längden av DF. Motivera varför arean av parallellogrammen är ah.

17. I en fyrhörning är två av sidorna parallella och lika långa. Måste fyrhörningen vara en parallellogram?

18. $ABCD$ är en fyrhörning och E är diagonalernas skärningspunkt. Kan man säkert säga att AB är parallell med CD i följande fall? Om svaret är nej, så skall du ange ett motexempel.

    a) $|AE| = |DE|$, $|BE| = |CE|$

    b) $\wedge A \cong \wedge C$, $\wedge B \cong \wedge D$

    c) $|AE| = |BE|$, $|CE| = |DE|$

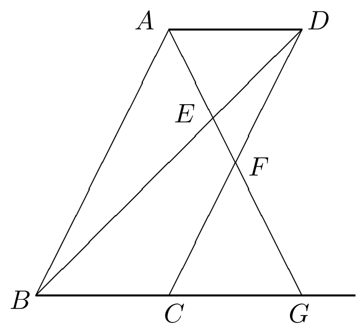
    d) $|AB| = |CD|$, $\wedge B \cong \wedge D$ (Ledning: Använd eventuellt det falska kongruensfallet.)

19. En *romb* är en fyrhörning i vilken alla sidor är lika långa. Visa att en parallellogram är en romb om och endast om diagonalerna skär varandra under rät vinkel.

20. I en (konvex) fyrhörning $ABCD$ gäller att AB är lika lång som AD och BC lika lång som CD. Om E är diagonalernas skärningspunkt, så gäller vidare att AE är lika lång som CE. Visa att $ABCD$ är en romb.

21. Ett *parallelltrapets* är en fyrhörning i vilken två sidor är parallella. I ett visst parallelltrapets är en av de parallella sidorna dubbelt så lång som den andra. Visa att vardera diagonalen skär av den andra en tredjedel.

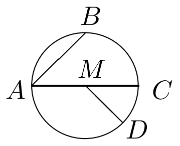
22. I parallellogrammen $ABCD$ drar man en linje genom A. Linjen skär diagonalen BD i E, sidan CD i F och BCs förlängning i G. Bestäm $|FG|$ då det är känt att $|AE| = 12, |EF| = 9$. Ledning: Bestäm först $|DF|/|AB|$.



23. Visa att om diagonalerna i en fyrhörning är lika långa och delar varandra mitt itu, så är fyrhörningen en rektangel.

3 Cirklar

En cirkel består av alla punkter som har samma avstånd till en viss given punkt. Avståndet ifråga kallas cirkelns radie och den givna punkten för medelpunkt.[4] En *korda* är en sträcka eller linje som förbinder två punkter på cirkeln, t ex AB i figuren (korda kommer av ett grekiskt ord som betyder sträng, jfr *chord* på engelska). En korda som går genom medelpunkten kallas förstås diameter (”mäta genom” på grekiska) och en sträcka som förbinder medelpunkten med en punkt på omkretsen kallas radie. Två punkter på cirkeln bestämmer två *cirkelbågar*.

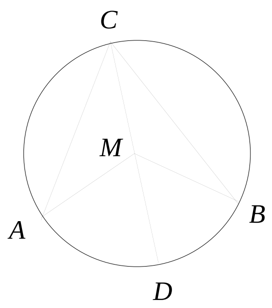


M medelpunkt
AC diameter
MD radie
AB korda (liksom AC)

3.1 Periferivinkelsatsen

I nästa figur har vi ritat ut två vinklar på bågen AB. Den ena är *medelpunktsvinkeln* $\wedge AMB$ (M är medelpunkten) och den andra är en *periferivinkel* (ibland kallad randvinkel) $\wedge ACB$. Vi skall bevisa *periferivinkelsatsen*, som säger att medelpunktsvinkeln alltid är dubbelt så stor som periferivinkeln,

$$(\wedge AMB)^\circ = 2 \cdot (\wedge ACB)^\circ.$$



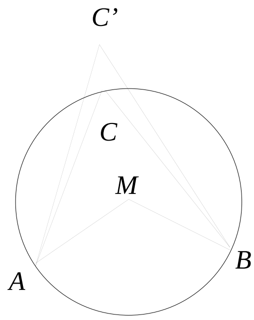
Drag diametern CD. Triangeln $\triangle AMC$ är likbent eftersom både AM och CM är radier i cirkeln. Alltså är

$$(\wedge AMD)^\circ = 180^\circ - (\wedge AMC)^\circ = (\wedge CAM)^\circ + (\wedge ACM)^\circ = 2 \cdot (\wedge ACM)^\circ.$$

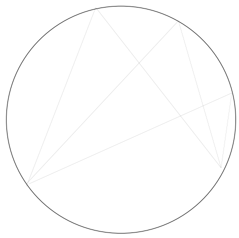
[4] Området innanför cirkeln brukar kallas cirkelskiva, men ibland säger man cirkel även om detta. I så fall kan man kalla själva cirkeln för omkrets eller periferi. Sammanhanget får avgöra vad man menar.

På samma sätt får vi $(\wedge BMD)^\circ = 2 \cdot (\wedge BCM)^\circ$ och addition av dessa ger resultatet. Läsaren får själv fundera igenom hur beviset går till i det fall då M ligger utanför vinkeln $\wedge ACB$.

Periferivinkelsatsen har en omvändning som har ett visst intresse. Antag att C' är en punkt sådan att vinkeln $\wedge AC'B$ är hälften av $\wedge AMB$. Då måste C' ligga på cirkelperiferin. För antag t ex att C' ligger utanför cirkeln och låt C i så fall vara en punkt på periferin och inuti $\wedge AC'B$. Enligt periferivinkelsatsen är $\wedge ACB \cong \wedge AC'B$, så den stora vinkeln vid C är lika med $360^\circ - (\wedge ACB)^\circ = 360^\circ - (\wedge AC'B)^\circ$. Eftersom vinkelsumman i fyrhörningen $C'ACB$ är 360 grader, så följer det av detta att både $\wedge C'AC$ och $\wedge CBC'$ är 0, vilket motsäger att C' ligger utanför cirkeln. Fallet då C' ligger inuti cirkeln hanteras på samma sätt.

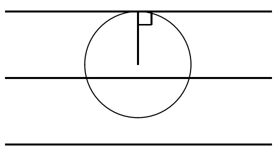


En konsekvens av periferivinkelsatsen är att *alla periferivinklar på samma båge är lika stora*. De tre vinklarna i figuren är alltså lika stora.

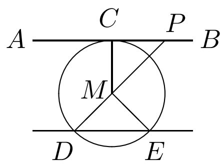


3.2 Tangenter

För skärningen mellan en cirkel och en linje finns det tre möjligheter, nämligen att de inte skär varandra, att de skär varandra i en punkt samt att de skär varandra i två punkter. I det andra fallet nuddar linjen alltså cirkeln och man säger att den är en *tangent* till cirkeln.



En viktigt faktum om tangenter är att *radien i tangeringspunkten är vinkelrät mot tangenten.* Att det måste vara på det sättet kan man gott tro på utan bevis (det ser ju likadant ut på båda sidor om tangeringspunkten), men för den intresserade skall vi i alla fall ge en motivering. Antag först att tangenten AB inte är vinkelrät mot radien. Drag en linje MP som är vinkelrät mot AB. Då är radien MC hypotenusa i en rätvinklig triangel $\triangle MPC$ och då kateterna är kortare än hypotenusan, så får vi $|MP| < |MC|$. Men då måste P ligga innanför cirkeln och linjen AB skära cirkeln i två punkter.



Å andra sidan kan man bevisa att en linje som skär cirkeln och är vinkelrät mot radien i skärningspunkten måste vara en tangent: För betrakta linjen DE i figuren och antag att den är vinkelrät mot radien MD. Triangeln $\triangle MDE$ är likbent och alltså är även $\wedge MED$ rät. Men en triangel kan naturligtvis inte ha två räta vinklar.

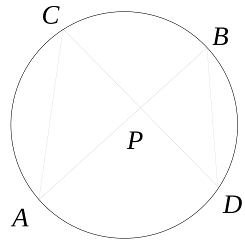
Kordasatsen handlar om skärningar mellan kordor i en cirkel eller deras förlängningar. I första fallet av kordasatsen skär två kordor AB och CD varandra i en punkt P inuti cirkeln: Vinklarna $\wedge ACD$ och $\wedge ABD$ är lika eftersom de båda står på bågen AD. Av samma skäl är vinklarna $\wedge CAB$ och $\wedge CDB$ lika, så enligt VVV är $\triangle APC$ och $\triangle DPB$ likformiga, alltså

$$\frac{|AP|}{|DP|} = \frac{|CP|}{|BP|},$$

vilket ger

$$|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|.$$

Detta är första fallet av kordasatsen.



I det andra fallet ligger skärningspunkten P utanför cirkeln: Nu är trianglarna $\triangle APD$ och $\triangle CPB$ likformiga. För vinkeln $\wedge P$ är gemensam och $\wedge BAD$ och

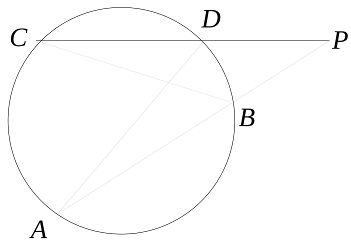
$\wedge BCD$ står på samma båge, så likformigheten följer återigen av VVV. Alltså är

$$\frac{|AP|}{|CP|} = \frac{|DP|}{|BP|}$$

eller

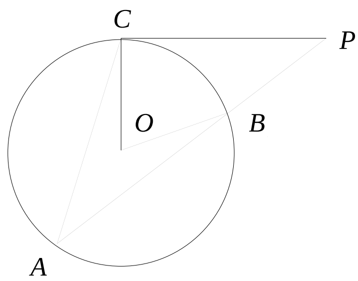
$$|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|,$$

vilket är det andra fallet.



Lägg märke till att första och andra fallet formellt ser exakt likadana ut. Det tredje fallet är egentligen ett urartningsfall, då en av kordorna har övergått till en tangent (man kan säga att punkterna C och D i figuren ovan har sammansmält): Punkten O är cirkelns medelpunkt. Enligt periferivinkelsatsen är $(\wedge BOC)^\circ = 2 \cdot (\wedge BAC)^\circ$ och eftersom triangeln $\triangle COB$ är likbent (både OC och OB är radier), så är

$$(\wedge OCB)^\circ = \frac{180^\circ - (\wedge BOC)^\circ}{2} = 90^\circ - (\wedge BAC)^\circ.$$

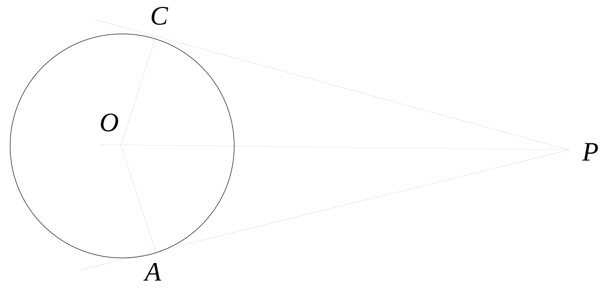


Tangenten CP är vinkelrät mot radien OC, så $(\wedge BCP)^\circ = 90^\circ - (\wedge OCB)^\circ = (\wedge BAC)^\circ$. Enligt VVV igen är $\triangle CBP$ och $\triangle ACP$ likformiga, varför

$$\frac{|AP|}{|CP|} = \frac{|CP|}{|BP|} \quad \text{och alltså} \quad |AP| \cdot |BP| = |CP|^2.$$

Lägg märke till att detta är precis vad man får om man i det andra fallet sätter $C = D$.

I det fjärde och sista fallet har båda kordorna urartat till tangenter:



Vinklarna $\wedge OAP$ och $\wedge OCP$ är räta, så Pythagoras sats ger

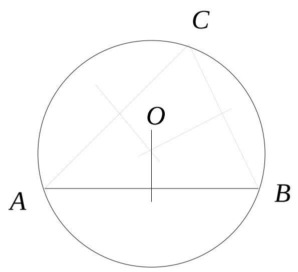
$$|AP|^2 = |OP|^2 - |OA|^2 = |OP|^2 - |OC|^2 = |CP|^2, \quad \text{alltså} \quad |AP| = |CP|.$$

Fjärde fallet säger således att de två tangenterna från en punkt utanför en cirkel till cirkeln är lika långa.

3.3 Omskrivna cirkeln

En cirkel som går genom alla tre hörnen i en triangel $\triangle ABC$ kallas en *omskriven* cirkel till triangeln. Vi skall bevisa att varje triangel har precis en omskriven cirkel samt bestämma dess medelpunkt och radie. *Om* det finns en omskriven cirkel till $\triangle ABC$, så har dess medelpunkt O samma avstånd till A, B och C. Men en punkt som har samma avstånd till två givna punkter ligger på mittpunktsnormalen till sträckan mellan de givna punkterna. Alltså ligger O - om den finns - på mittpunktsnormalen till sträckorna AB och AC. Men då vet vi hur vi skall bevisa att den omskrivna cirkeln finns.

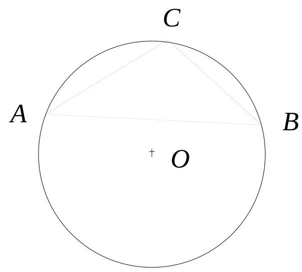
För dra mittpunktsnormalerna till två av sidorna i $\triangle ABC$, säg till AB och AC. Kalla deras skärningspunkt för O (vi bör kanske notera att normalerna faktiskt skär varandra, ty annars vore de parallella och då vore sidorna också parallella). Eftersom O ligger på mittpunktsnormalen till AB, så har den samma avstånd till A och B. Eftersom O ligger på mittpunktsnormalen till AC, så har den samma avstånd till A och C. Alltså har den samma avstånd till alla tre hörnen och då den har samma avstånd till B och C, så ligger den även på mittpunktsnormalen till BC. Vi har tydligen bevisat att de tre mittpunktsnormalerna i en triangel skär varandra i en punkt O. Cirkeln med medelpunkt i O och radie OA går genom alla tre hörnen och är således en omskriven cirkel.



Vi har skrivit *en* omskriven cirkel ovan. Kan det finnas flera? Nej, det framgår av det första stycket. Medelpunkten i en omskriven cirkel måste ligga på alla tre mittpunktsnormalerna och alltså vara deras skärningspunkt, dvs O.

Ett annat sätt att formulera ovanstående är att det genom tre punkter som inte ligger på en rät linje går en och endast en cirkel.[5]

I figuren ovan är $\wedge AOB$ dubbelt så stor som $\wedge ACB$ enligt periferivinkelsatsen. Om triangeln $\triangle ABC$ är trubbvinklig vid C, så blir $\wedge AOB$ större än $180°$, vilket betyder att medelpunkten O ligger utanför triangeln. Omvändningen är förstås också sann, dvs om O ligger utanför $\triangle ABC$ så är triangeln trubbvinklig.

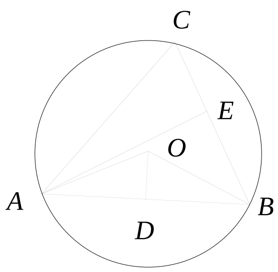


Det finns en elegant formel för omskrivna cirkelns radie R_O som vi nu skall härleda. Sätt $|AB| = c, |AC| = b, |BC| = a$. I figuren nedan är D mittpunkten på AB, så OD är vinkelrät mot AB.

Triangeln $\triangle ABO$ är likbent, så $\wedge AOD$ är hälften av $\wedge AOB$. Men $\wedge AOB$ är dubbelt så stor som $\wedge ACB$, så $\wedge AOD \cong \wedge ACB$. Drag höjden AE från A mot BC. Trianglarna $\triangle ADO$ och $\triangle AEC$ är rätvinkliga och alltså är alla tre vinklarna lika. De är tydligen likformiga, varför

$$\frac{|AO|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} \quad \text{dvs} \quad \frac{R_O}{c/2} = \frac{b}{h},$$

[5] Ibland är det bekvämt och ändamålsenligt att betrakta en linje som en cirkel med oändlig radie.



där h är längden av höjden mot BC. Omskrivning ger

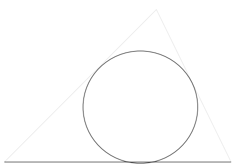
$$R_O = \frac{bc}{2h} = \frac{abc}{2ah} = \frac{abc}{4 \cdot ah/2}.$$

Men $ah/2$ är inget annat än arean av $\triangle ABC$. Om vi betecknar den med T, så får vi formeln

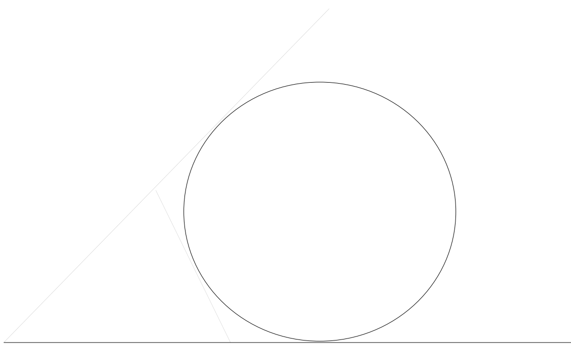
$$R_O = \frac{abc}{4T}.$$

3.4 In- och vidskrivna cirklar

En cirkel som tangerar alla tre sidorna i en triangel kallas en *inskriven cirkel*. En cirkel som tangerar en av sidorna och de två andras förlängningar kallas en *vidskriven cirkel*. Vi skall bevisa att varje triangel har en (och endast en) inskriven cirkel och tre vidskrivna cirklar samt bestämma deras medelpunkter och radier.

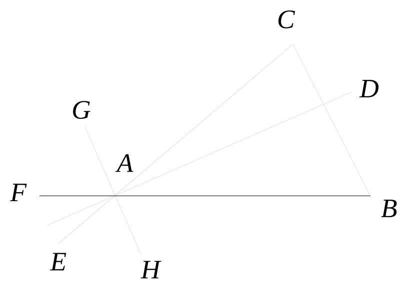


Inskriven cirkel



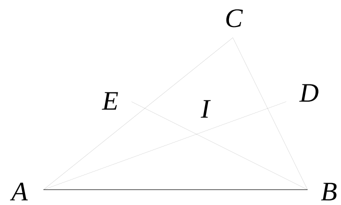
Vidskriven cirkel

Minns nu att bisektrisen till en vinkel består av de punkter som har samma vinkelräta avstånd till de två vinkelbenen. I $\triangle ABC$ i figuren kallar vi AD en *inre* bisektris. I figuren är sidorna AB och AC förlängda förbi A. Yttervinklarna vid A är som vi har sagt tidigare $\wedge BAE$ och $\wedge CAF$. De är förstås lika stora och lika med summan av innervinklarna $\wedge ABC$ och $\wedge ACB$. Bisektrisen GH till dessa två yttervinklar kallar vi en *yttre* bisektris.

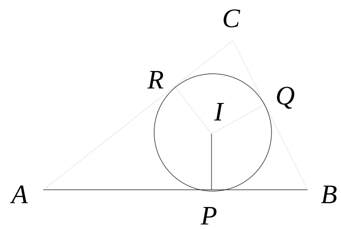


Inre och yttre bisektriser

Det finns alltså tre yttre och tre inre bisektriser. Lägg märke till att de inre och yttre bisektriserna vid samma hörn är vinkelräta (varför?). Drag två av de inre bisektriserna AD och BE och beteckna deras skärningspunkt med I. Då har I samma (vinkelräta) avstånd till AB som till AC eftersom I ligger på AD. Men I ligger även på BE och har därför samma avstånd till BC som till BA. Alltså har I samma avstånd till alla *tre* sidorna i triangeln. Härav drar vi först slutsatsen att I även ligger på bisektrisen från C.

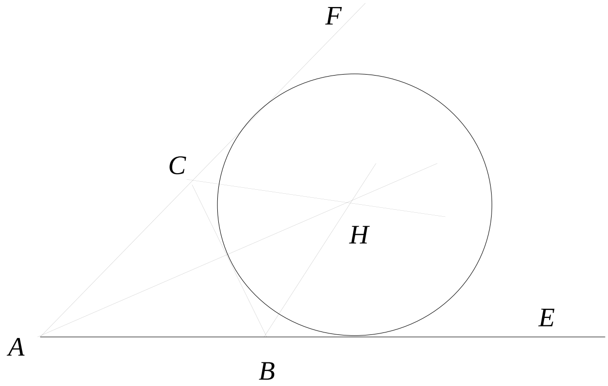


Drag höjderna från I mot sidorna och beteckna fotpunkterna med P, Q, R. Då har vi visat att $|IP| = |IQ| = |IR|$. Drag en cirkel med medelpunkt I och radie IP. Den går tydligen även genom Q och R och eftersom IP är vinkelrät mot BC, så *tangerar* den BC i punkten P. Cirkeln med medelpunkt I och radie IP är således en inskriven cirkel.

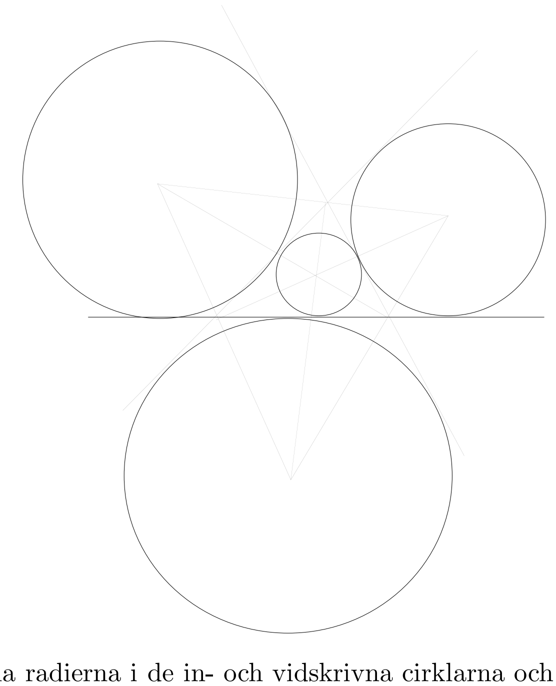


Det kan bara finnas *en* inskriven cirkel. Ty låt I' vara medelpunkt i en inskriven cirkel $\mathcal{C}$. Då har I' samma avstånd till alla tre sidorna i triangeln och ligger därför på alla tre bisektriserna. Men bisektrisernas skärningspunkt är ju som vi såg nyss punkten I, så $I' = I$. Radien i $\mathcal{C}$ är det vinkelräta avståndet från I' till BC, dvs IP. Alltså är $\mathcal{C}$ samma cirkel som vi konstruerade ovan.

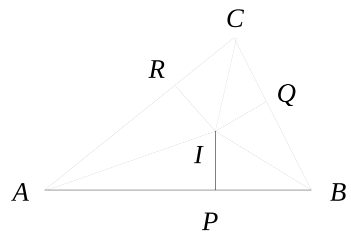
Idén i konstruktionen av de vidskrivna cirklarna är att istället dra de yttre bisektriserna vid B och C. Beteckna deras skärningspunkt med H.



Då har H samma avstånd till BE som till BC och som till CF. BE och CF är ju förlängningarna av AB respektive AC, så H har samma avstånd till AE som till AF, vilket betyder att H ligger på (förlängningen av) den inre bisektrisen till A. De två yttre bisektriserna vid B och C samt den inre bisektrisen vid A skär tydligen varandra i en punkt som har samma avstånd till BE, CF och BC, varför den är medelpunkt i en cirkel som tangerar BC och förlängningarna av AB och AC. Det finns alltså vidskrivna cirklar. Att det bara finns en vid varje sida ser man genom att kopiera beviset för att det bara finns en inskriven cirkel. Nästa figur visar både den inskrivna och de vidskrivna cirklarna.



Vi skall beräkna radierna i de in- och vidskrivna cirklarna och börjar med den inskrivna. Beteckna dess radie med R_I. Inför för enkelhets skull beteckningarna $|AB| = c, |AC| = b, |BC| = a$. I figuren är P, Q, R de punkter i vilka den inskrivna cirkeln tangerar triangelns sidor. Då är IP höjd i $\triangle ABI$, som alltså har arean $R_I \cdot c/2$. På samma sätt får vi att arean av $\triangle BCI$ och $\triangle AIC$ är $R_I \cdot a/2$ respektive $R_I \cdot b/2$.



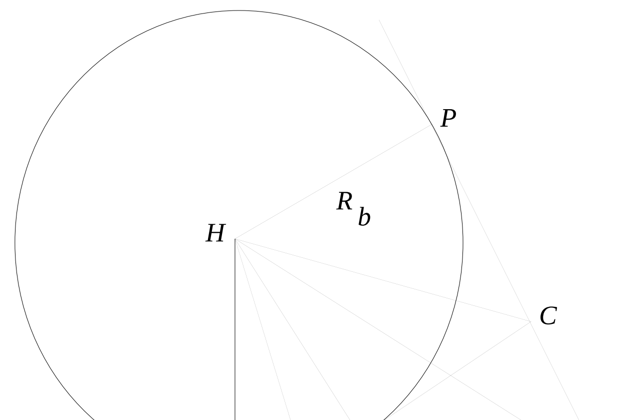
Arean T av $\triangle ABC$ är summan av småtrianglarnas areor, dvs

$$T = \frac{R_I \cdot c}{2} + \frac{R_I \cdot a}{2} + \frac{R_I \cdot b}{2} = R_I \cdot \frac{a+b+c}{2} = R_I p,$$

där p är halva omkretsen av $\triangle ABC$. Alltså är

$$R_I = \frac{T}{p}.$$

Radien i den vidskrivna cirkeln vid BC betecknar vi med R_a osv. Vi skall beräkna arean av fyrhörningen $ABCH$ i figuren nedan på två olika sätt.



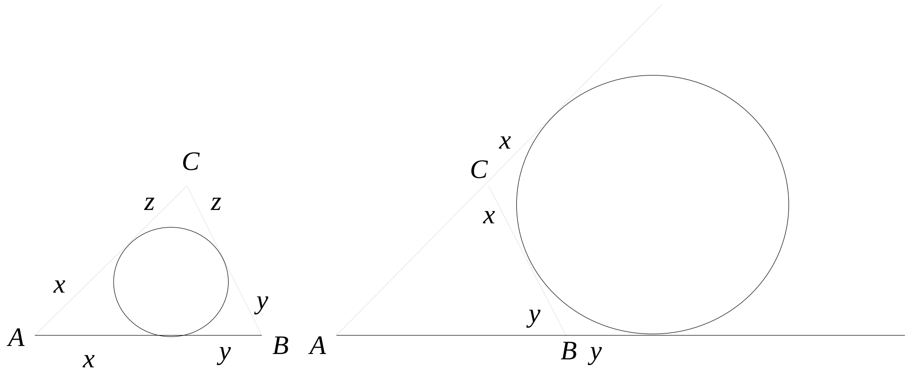
Å ena sidan är den sammansatt av de två trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle ACH$. Som bas i den senare väljer vi AC och då är höjden R_b eftersom radien i tangeringspunkten är vinkelrät mot tangenten AC. Arean av $ABCH$ blir $T + R_b \cdot b/2$, där T är arean av $\triangle ABC$. Å andra sidan är $ABCH$ sammansatt av $\triangle ABH$

och $\triangle BCH$. Som bas i den förra väljer vi sidan AB och höjden är då radien HR eftersom den är vinkelrät mot ABs förlängning. Arean av $\triangle ABH$ är tydligen $R_b \cdot c/2$ och analogt får vi att arean av $\triangle BCH$ är $R_b \cdot a/2$. Alltså är $T + R_b b/2 = R_b a/2 + R_b c/2$, vilket ger

$$R_b = \frac{T}{(a+c-b)/2} = \frac{T}{p-b}.$$

3.5 Ett vackert bevis för Herons formel

Som avslutning på det här avsnittet skall vi använda in- och vidskrivna cirklar för att ge ett elegant bevis för Herons formel. Det är mer geometriskt än det vi gav i ett tidigare avsnitt. Vi börjar med att beräkna avstånden från hörnen i $\triangle ABC$ till de in- och vidskrivna cirklarnas tangeringspunkter med sidorna.



Kom ihåg att de två tangenterna från en punkt till en cirkel är lika långa. I figuren till vänster ser vi att $x + y = c,\ x + z = b,\ y + z = a$. Eftersom $x + y + z = p$, så ger detta omedelbart $x = p - a,\ y = p - b,\ z = p - c$. Den högra figuren ger $x + y = a,\ x + b = y + c$ (den andra av dessa likheter följer av att tangenterna från A är lika långa), varav $x = p - b,\ y = p - c$.

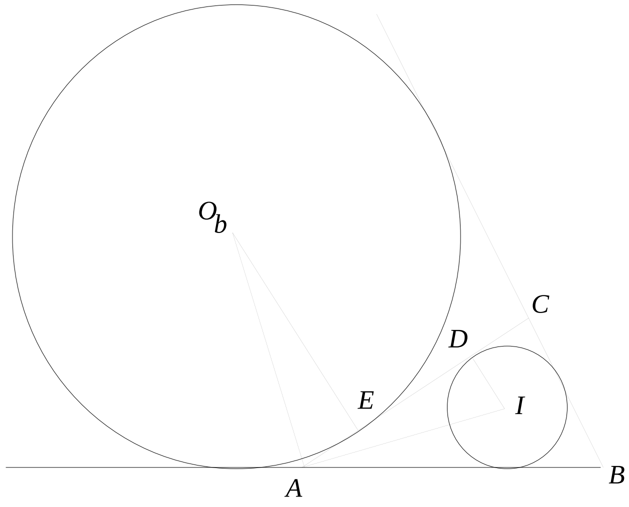
I figuren nedan är både den inskrivna och en av de vidskrivna cirklarna utritade. Den inskrivna cirkeln tangerar AC i D och den vidskrivna i E. Medelpunkterna betecknas I respektive O_b. Vinkeln $\wedge IAO_b$ är rät eftersom den är vinkeln mellan de inre och yttre bisektriserna. Vinklarna $\wedge IDA$ och $\wedge O_bEC$ är också räta. Av $(\wedge DIA)^\circ + (\wedge DAI)^\circ = 90^\circ$ och $(\wedge DAI)^\circ + (\wedge EAO_b)^\circ = 90^\circ$ får vi $\wedge DIA \cong \wedge EAO_b$ och det följer att $\triangle IAD \sim \triangle AO_bE$. Alltså är

$$\frac{|ID|}{|AD|} = \frac{|AE|}{|O_bE|}, \quad \text{dvs} \quad R_I R_b = (p-a)(p-c).$$

Enligt formlerna för in- och vidskrivna cirklarnas radier är emellertid $R_i R_b = T^2/p(p-b)$. Sätter vi samman dessa två likheter, så får vi

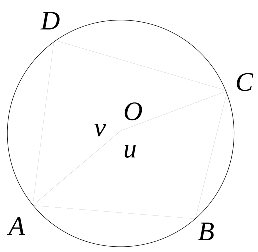
$$T^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

alltså Herons formel.

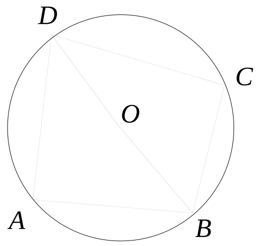


3.6 Cirkelfyrhörningar och Ptolemaios sats

Till varje triangel finns det som vi har sett en omskriven cirkel, men alla fyrhörningar har inte omskrivna cirklar. En fyrhörning som har det kallas en *cirkelfyrhörning*. Rektanglar är cirkelfyrhörningar, men det finns förstås gott om andra också. Vi skall börja med att bevisa att *en fyrhörning $ABCD$ är en cirkelfyrhörning om och endast om motstående vinklar har summan* $180°$. I figuren är $ABCD$ en cirkelfyrhörning (O är cirkelns medelpunkt). Medelpunktsvinklarna som svarar mot $\wedge D$ respektive $\wedge B$ är markerade u respektive v. Summan av dessa är ett helt varv, så summan av $\wedge B$ och $\wedge D$ är ett halvt varv enligt periferivinkelsatsen.



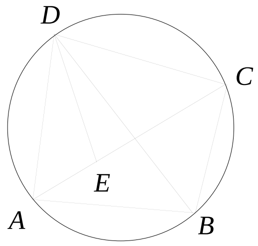
För omvändlingen antar vi att det i fyrhörningen $ABCD$ (figur 2) gäller att $(\wedge A)° + (\wedge C)° = (\wedge B)° + (\wedge D)° = 180°$. Vi skall alltså bevisa att den kan skrivas in i en cirkel. Omskriv en cirkel till $\triangle BCD$ och låt dess medelpunkt vara O. Medelpunktsvinkeln för den av cirkelbågarna mellan B och D som C inte ligger på är $2 \cdot (\wedge C)°$, så medelpunktsvinkeln för den båge som C ligger på är $360° - 2 \cdot (\wedge C)°$. Enligt förutsättningen är vinkeln $\wedge BAD$ hälften av detta, så periferivinkelsatsens omvändning ger att A ligger på cirkeln.



I cirkelfyrhörningar gäller ett vackert samband mellan längderna av sidorna och diagonalerna, Ptolemaios sats, som säger att med beteckningar som i figuren så är

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|.$$

I figuren har vi markerat en punkt E på AC sådan att $\wedge ADE \cong \wedge BDC$. Eftersom periferivinklarna $\wedge DAC$ och $\wedge DBC$ båda står på kordan DC, så är de kongruenta och enligt VVV är $\triangle AED \sim \triangle BCD$.



Härav följer

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BD|}, \quad \text{alltså} \quad |AD| \cdot |BC| = |AE| \cdot |BD|.$$

Vi har också $\wedge ABD \cong \wedge ACD$ och $\wedge ADB \cong \wedge EDC$, så $\triangle ABD \sim \triangle ECD$. Alltså är

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|EC|}{|CD|} \quad \text{vilket ger} \quad |AB| \cdot |CD| = |EC| \cdot |BD|.$$

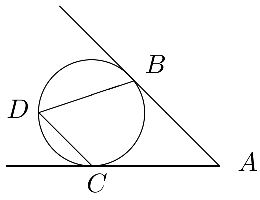
Addition ger

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = (|AE| + |EC|) \cdot |BD| = |AC| \cdot |BD|.$$

Klaudios Ptolemaios (död ca 165 e Kr) var verksam i Alexandria som matematiker och astronom. Hans mest kända verk heter Syntaxis Mathematica på grekiska, men är mer känt under namnet *Almagest*, efter ett arabiskt ord som betyder ungefär *det största* (ingen falsk blygsamhet, således!). Det är en handbok i bl a astronomi och innehåller en detaljerad teori för planeternas rörelser i det geocentriska systemet (dvs med jorden i solsystemets centrum), som hade mycket stor betydelse för världsbilden ända fram till 1600-talet. Ptolemaios var en av grundläggarna av trigonometrin och Ptolemaios sats kan användas för att konstruera trigonometriska tabeller.

3.7 Övningar

1. I figuren är AB och AC tangenter till cirkeln och $(\wedge BAC)^\circ = 38^\circ$. Bestäm $(\wedge BDC)^\circ$.



2. En femhörning $ABCDE$ är inskriven i en cirkel och $(\wedge A)^\circ = 120^\circ, (\wedge B)^\circ = 120^\circ, (\wedge C)^\circ = 110^\circ, (\wedge D)^\circ = 100^\circ$. Bestäm $(\wedge DAE)^\circ$ och $(\wedge DAC)^\circ$.

3. Två cirklar med medelpunkter D respektive E tangerar varandra på utsidan i A. BC är en gemensam tangent (B ligger på den första och C på den andra cirkeln) till cirklarna. Bevisa att $\wedge BAC$ är rät. Ledning: Bestäm först $(\wedge BDA)^\circ + (\wedge CEA)^\circ$.

4. Låt C_1 och C_2 vara två lika stora cirklar som skär varandra i punkterna A och B. Låt vidare D och E vara punkter på C_1 respektive C_2 (ej lika med A eller B).

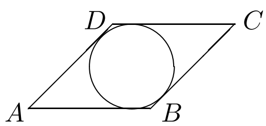
   a) Bevisa att om D och E ligger på olika sidor om linjen AB, så är $\wedge ADB \cong \wedge AEB$.

   b) Formulera och bevisa ett liknande samband mellan $\wedge ADB$ och $\wedge AEB$ om D och E ligger på samma sida om AB.

5. AB är en diameter i en cirkel med medelpunkt M. C är en punkt på cirkeln. Bestäm $(\wedge BMC)^\circ$ om $(\wedge ABC)^\circ = 80^\circ$.

6. AB är en diameter av längd 13 i en cirkel. C är en punkt på cirkeln sådan att $|AC| = 5$. Bestäm $|BC|$.

7. En fyrhörning $ABCD$ är omskriven en cirkel, dvs cirkeln tangerar alla fyra sidorna i fyrhörningen. Bevisa att $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$.



8. En korda AB i en cirkel förlängs till en punkt P utanför cirkeln. Man har $|AB| = 5, |BP| = 4$ och $|MP| = 10$, där M är cirkelns medelpunkt. Beräkna cirkelns radie.

9. A, B och C är tre punkter på en cirkel och P en punkt utanför cirkeln. Vidare ligger B, C och P på en rät linje och AP är tangent till cirkeln. Beräkna $|AP|$ om man vet att $|BP| = 2, |BC| = 4$.

10. AB och CD är två kordor i en cirkel. De skär varandra utanför cirkeln i E under rät vinkel. Antag att $|AE| = 6, |EB| = 4$ och $|AC| = 10$. Beräkna $|CD|$.

11. Inuti en cirkel med medelpunkt M och radie 5 liger en punkt P. En korda genom P vinkelrätt mot MP har längd 5. Bestäm $|MP|$.

12. Triangeln $\triangle ABC$ är liksidig och D är mittpunkten på AB. En cirkel går genom C och tangerar AB i D. Låt E vara skärningspunkten mellan cirkeln och AC. Beräkna förhållandet $|AE|/|CE|$.

13. Fyrhörningen $ABCD$ är inskriven i en cirkel och kordorna AC och BD delar varandra på mitten. Bevisa att $ABCD$ är en rektangel.

14. Kordorna AB och CD i en cirkel är parallella på ett avstånd av 3 cm. De skär diametern EF under rät vinkel. Bestäm cirkelns radie om man vet att $|AB| = |CD| = 4$ cm.

15. I en cirkel dras två kordor AB och CD som skär varandra i E innanför cirkeln. Antag att $\wedge ACD$ är rät och att $|BE| = 6, |CE| = 12$ och $|DE| = 8$. Bestäm cirkelns radie.

16. Var ligger omskrivna cirkelns medelpunkt i en rätvinklig triangel?

17. Bevisa med hjälp av den sista figuren i avsnittet om omskrivna cirkeln att $\sin(\wedge C)^\circ = c/2R_O$ och sedan att
$$\frac{\sin(\wedge A)^\circ}{a} = \frac{\sin(\wedge B)^\circ}{b} = \frac{\sin(\wedge C)^\circ}{c} = \frac{1}{2R_O}$$
(utvidgade sinussatsen).

18. Låt O vara medelpunkten i omskrivna cirkeln till $\triangle ABC$. Man vet att $(\wedge AOB)^\circ : (\wedge BOC)^\circ : (\wedge COA)^\circ = 1 : 2 : 3$ och att ingen av triangelns vinklar är större än 90 grader. Vilken av sidorna i triangeln är längst? Beräkna längden av den längsta sidan om cirkelns radie är 5.

19. I $\triangle ABC$ är $|AC| = |BC| = 12$ och $R_O = 8$. Bestäm $|AB|$.

20. Bevisa att $T = \sqrt{R_I R_a R_b R_c}$ (beteckningar som i avsnittet om inskrivna cirkeln).

21. Bevisa att $R_a + R_b + R_c - R_I = 4R_O$, där R_O är den omskrivna cirkelns radie.

22. Bevisa att

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_I}.$$

4 Längd och area

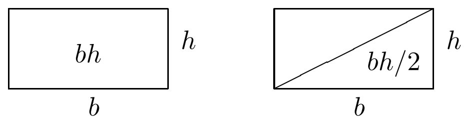
4.1 Begreppen längd och area

Längd och area är inte så enkla och okomplicerade begrepp som man kanske inbillar sig. Svårigheterna med längdbegreppet kommer när man skall definiera vad man menar med förhållandet mellan två sträckors längder och när man skall tilldela sträckor längdmått. Grekerna sade att två sträckor S_1 och S_2 är *kommensurabla* om de har ett "gemensamt mått", dvs om det finns en sträcka S som går ett helt antal gånger i dem båda. Om den går n_1 gånger i S_1 och n_2 gånger i den andra, så säger man förstås att förhållandet mellan deras längder är n_1/n_2, dvs ett rationellt tal. Ordet kommensurabla betyder samtidigt mätbara. Är alla sträckor kommensurabla eller finns det sådana som är inkommensurabla? Ett annat sätt att uttrycka frågan är om det finns sträckor som har ett irrationellt förhållande.

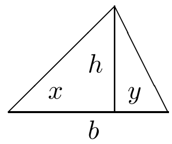
Svaret på frågan är ja, men att det överhuvudtaget finns irrationella tal är inte trivialt och upptäckten av dem orsakade ett visst tumult i den grekiska lärda världen. Enligt den filosofiska och matematiska skola som grundades av Pythagoras (ca 585-500 f Kr) i Kroton i södra Italien kan allt i universum beskrivas med hela tal, ja, allt är till och med uppbyggt av hela tal. Pythagoréerna utvecklade en hel världsåskådning baserad på denna talmystik och det var en omskakande upplevelse för dem när en av deras egna, Hippasos, upptäckte att sidan och diagonalen i en regelbunden femhörning är inkommensurabla sträckor. Förhållandet mellan dessa brukar kallas det *gyllene snittet*. Enligt en legend blev Hippasos dödad för att inte kunna sprida den fruktansvärda hemligheten och enligt en annan fick alla pythagoréer svära att inte avslöja den för utomstående. I läroböckerna brukar det första irrationella talet som dyker upp vara $\sqrt{2}$, men historiskt var det förmodligen det gyllene snittet som var först. Att $\sqrt{2}$ är irrationellt lär ha bevisats först av Aristoteles (384-322 f Kr).

Elementa (bl a bok V och VI) innehåller en (påfallande modern) teori för inkommensurabla storheter som utvecklades av Eudoxos från Knidos (ca 408-355 f Kr). Det är existensen av inkommensurabla storheter som gör likformighet till ett mycket mer komplicerat begrepp än kongruens. Vi skall inte redogöra för Eudoxos teori här, utan nöjer oss med ett intuitivt längdbegrepp. Ytterligare komplikationer blir det förstås när man skall definiera och beräkna längden av kurvor, t ex omkretsen av en cirkel. Det är kanske inte så svårt att tro på att omkretsen av en cirkel är proportionell mot radien, dvs att kvoten O/r, där O är omkretsen och r radien, är densamma för alla cirklar. Den betecknas sedan 1700-talet med 2π, där π är den grekska bokstaven pi, som motsvarar vårt p. π är den första bokstaven i grekiskans ord för omkrets, periferi. Vi har som bekant $\pi \approx 3,14$.

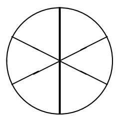
Areabegreppet är naturligtvis minst lika komplicerat som längdbegreppet och vi skall inte göra något stort nummer av det heller, utan bara diskutera arean av några vanliga geometriska figurer, nämligen rektanglar, trianglar och cirklar. Arean av en rektangel är lika med basen gånger höjden och eftersom en rätvinklig triangel kan uppfattas som en halv rektangel, så måste arean av en sådan vara basen gånger höjden genom 2:



Triangeln till höger delas av höjden i två rätvinkliga trianglar med area $xh/2$ respektive $yh/2$ och lägger man ihop dem så får man arean $bh/2$ eftersom $b = x + y$. Om höjden faller utanför triangeln så får man modifiera detta, men det överlämnas till läsaren att genomföra detaljerna.



En polygons area kan man beräkna genom att dela in den i trianglar. Cirkelns area hör egentligen mer hemma i en kurs i matematisk analys än i en i geometri, men vi skall ändå för fullständighetens skull kortfattat diskutera den. Vi delar in cirkeln i n stycken likadana "tårtbitar" som i figuren (som visar fallet $n = 6$).



De kilformade bitarna är inte trianglar eftersom deras baser är cirkelbågar, men om vi gör dem smala (dvs väljer n stort), så blir de nästan trianglar. Arean av en tårtbit är ungefär $r \cdot O/2n$, där r är cirkelns radie och O omkretsen och ju större vi gör n, desto bättre borde denna approximation bli. Arean av cirkeln bör alltså vara

$$A = n \cdot \frac{r \cdot O}{2n} = \frac{r \cdot O}{2} = \pi r^2.$$

Det här är naturligtvis inte ett bevis för formeln för cirkelns area, utan bara en motivering. Det kan dock kompletteras till ett strikt bevis.

Ett faktum som kan vara värt att lägga på minnet är att om man förstorar en figur i skalan k (vilket innebär en förminskning om $k < 1$), så ökar arean med en faktor k^2. För trianglar är detta uppenbart ur areaformeln och då följer det även för polygoner. För cirkeln följer det också ur formeln för arean. Man kan visa att det är sant i allmänhet, men beviset kräver redskap som vi inte har här.

4.2 Mer om areabegreppet

Som avslutning på det här avsnittet kan det vara lämpligt att diskutera vad vi egentligen menar med area. Diskussionen kan också illustrera några skillnader mellan vårt vardagliga sätt att se på ett visst begrepp och matematikens syn på det, vilket i sin tur kan visa på något av matematikens natur.

Det intuitiva begreppet area betyder innehållet eller storleken av ett område, t ex ett hus eller en gräsmatta. I matematiken kan man emellertid inte använda ett sådant intuitivt begrepp som grund, utan man måste *definiera* vad man menar. Självklart utgår man från det intuitiva begreppet area, men innan man har gett en strikt definition "vet" man så att säga inte vad area är. När man definierar area börjar man med den enklaste typen av geometriska figurer, nämligen polygoner. Vad vill vi egentligen att areabegreppet skall uppfylla? Följande krav måste nog vara uppfyllda för att vi skall få något vettigt:

A1. Arean av en polygon skall vara ett positivt reellt tal.
A2. Arean av ett område som består av flera polygoner som inte överlappar varandra skall vara summan av delarnas area.

Finns det ett areabegrepp som uppfyller de här kraven? Lägg märke till att vi inte vet det ännu; kanske är det så att det inte finns något sådant begrepp! Men låt oss försöka i alla fall. Arean av den allra enklaste typen av polygon, nämligen rektangeln *definierar* vi som basen gånger höjden. Detta uppfyller under alla omständigheter A1 för rektanglar. En rektangel kan man ju dela in i mindre rektanglar på olika sätt och frågan är om den här definitionen uppfyller A2. Det gör den, vilket man kan visa med viss möda (redan så här tidigt stöter vi alltså på ganska svåra problem!). En rätvinklig triangel kan vi uppfatta som en halv rektangel och för att A2 skall vara uppfyllt så måste vi *definiera* arean av en rätvinklig triangel som basen gånger höjden genom 2. Observera att vi nu måste verifiera att den här definitionen inte leder till motsägelser samt att den uppfyller A1 och A2! Detta låter sig göras, men är inte trivialt på något sätt. Slutligen kan vi nu definiera area av en godtycklig triangel enligt receptet ovan och därefter kröner vi verket genom att definiera arean av en polygon genom att dela in den i trianglar och summera deras areor. Men återigen krävs det hårt arbete för att verifiera att denna definition inte leder till motsägelser och att den uppfyller våra krav A1 och A2. Hur vet vi exempelvis att arean av en polygon är oberoende av hur vi delar in den i trianglar? Slutresultatet är hur som helst att det går att definiera area på ett invändningsfritt sätt och så att A1 och A2 är uppfyllda.

Resonemanget ovan kan tyckas vara invecklat i överkant och kanske en och annan läsare frågar sig vad matematikerna egentligen sysslar med, men matematiken kan aldrig nöja sig med intuitiva begrepp eftersom intuitionen faktiskt tar fel emellanåt.

Nu har vi alltså tillgång till ett förträffligt areabegrepp för polygoner, men hur skall vi göra med t ex cirkeln? Vi måste konstatera att den tills vidare *inte har någon area*, helt enkelt för att vi inte har *definierat* vad vi menar med cirkelns area. Vi skall dock inte nöja oss med cirkelns area, utan försöker införa ett mer generellt areabegrepp. Vad skall man alltså mena med arean av ett område som begränsas av någon kurva, t ex en cirkel eller ellips? Eller arean av området som begränsas av x-axeln och kurvan $y = x^2$ från $x = 0$ till $x = 1$? Kan man överhuvudtaget definiera arean av sådana och ännu mer bisarra områden? En egenskap som det intuitiva areabegreppet har och som är en konsekvens av A2 är

A3. Om ett område Ω_1 ligger inuti ett annat område Ω_2, så har Ω_1 mindre area än Ω_2.

Vi betraktar nu polygoner som helt ligger inuti vårt område Ω respektive som helt täcker det. En polygon som ligger inuti området har alltid mindre area än en som täcker det enligt A3. Det kan vara bra att införa beteckningen $\mathcal{A}(P)$ för arean av polygonen P. Vi har alltså

$$\mathcal{A}(P_i) \leq \mathcal{A}(P_y)$$

om P_i ligger inuti Ω och P_y täcker det (i som i inre och y som i yttre). Nu kommer den matematiska definitionen av att Ω har en area:

Vi säger att Ω har en area om det finns ett och endast ett tal A som ligger mellan alla tal $\mathcal{A}(P_i)$ och $\mathcal{A}(P_y)$, där P_i och P_y har samma betydelse som nyss. Arean av Ω definieras som talet A.

Definitionen är inte helt lättgenomskådlig. När man har en definition så måste man förstås bevisa att det definierade begreppet uppfyller A1 och A2, vilket inte är helt enkelt. Sedan kan man börja arbeta och faktiskt försöka *beräkna* arean av några områden. Det visar sig, kanske något förvånande, att det finns egendomliga och bisarra områden som inte har någon area enligt den här definitionen. Här visar sig matematiken från sin icke-intuitiva sida, den som gör matematiken till ett sådant kraftfullt analysinstrument.

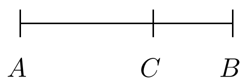
Syftet med det här avsnittet är förstås inte att läsaren skall memorera några detaljer, utan bara att visa på skillnaden mellan ett vardagligt, intuitivt begrepp och dess matematiska motsvarighet. Det är mycket nyttigt att fundera över den didaktiska sidan av areabegreppet också.

5 Gyllene snittet, regelbundna månghörningar och konstruktioner med passare och linjal

5.1 Det gyllene snittet

Det gyllene snittet är ett sätt att dela en sträcka i proportioner som ända sedan antiken har ansetts vara särskilt harmoniska och tilltalande för ögat. Det är intressant ur både matematisk och konsthistorisk synpunkt. Man säger att en punkt C delar en sträcka AB i det gyllene snittets proportioner om den mindre delen förhåller sig till den större som den större till hela sträckan. I en formel blir detta

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$



Sätt $a = |AB|,\ x = |AC|$. Då får vi ekvationen

$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}.$$

Vi är bara intresserade av hur stor del av a som x utgör, så låt oss sätta $\gamma = x/a$.[6] Ekvationen förenklas till

$$\frac{1}{\gamma} - 1 = \gamma \quad \text{eller} \quad \gamma^2 + \gamma = 1,$$

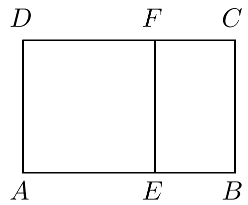
vilken man lätt löser och får

$$\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,6180339887.$$

(Det finns en negativ rot till ekvationen också, men γ är förhållandet mellan två sträckor och måste vara positivt.)

En rektangel i vilken sidorna har förhållandet γ kallas en *gyllene rektangel.* Sådana förekommer i konst och arkitektur och på andra ställen. Fasaden på Parthenontemplet på Akropolis är en gyllene rektangel, liksom en vanlig tändsticksask och en del tavelramar. Om man från den gyllene rektangeln till höger tar bort kvadraten på den kortare sidan AD, så återstår en mindre gyllene rektangel $BCFE$ eftersom $|EB|/|BC| = |EB|/|AE| = \gamma$.

[6] γ är den grekiska bokstaven gamma, som motsvarar vårt g.



Från $BCFE$ kan man ta bort kvadraten på EB och får en mindre gyllene rektangel och så kan man fortsätta i all oändlighet – rektanglarna blir mindre och mindre, men processen tar aldrig slut. Detta kan synas vara en ganska trivial observation, men har faktiskt stor historisk betydelse. Det var nämligen på det här sättet som pythagoréerna upptäckte irrationella tal.

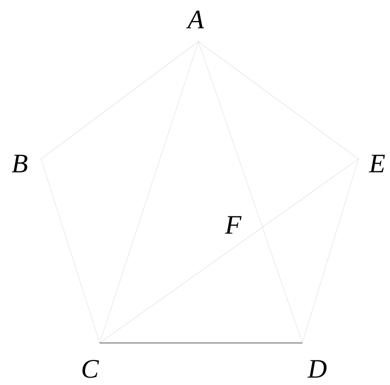
Låt oss bevisa att γ inte kan vara ett rationellt tal, ett vanligt bråk. För antag att γ vore rationellt, säg $\gamma = b/a$, där a och b är heltal. Vi har ju $\gamma < 1$, så $b < a$. Vi kan sätta längden av AB till 1 längdenhet, så att $|BC| = \gamma$. Längden av EB är $1 - \gamma = 1 - b/a = (a - b)/a = b_1/a$, där $b_1 = a - b$. Vi har $b_1 < b$, ty detta är detsamma som $a - b < b$ eller $a < 2b$, dvs $\gamma = b/a > 1/2$, vilket är sant. Om vi nu tar bort kvadraten på EB från $BCEF$, så får vi en ny gyllene rektangel i vilken den kortare sidan har längd $|BC| - |EB| = b/a - b_1/a = (b - b_1)/a = b_2/a$. Precis på samma sätt som förut ser vi att $b_2 < b_1$. När vi upprepar detta borttagande av kvadrater så får vi rektanglar i vilka den kortare sidan har längd b_i/a, där talen $b_1, b_2, b_2, \ldots$ är positiva heltal som minskar hela tiden. Men då måste något av dem förr eller senare bli 0, så processen tar förr eller senare slut. Detta konstaterade vi ovan att den inte gör, rektanglarna blir förvisso mindre och mindre, men helt försvinner de inte. Det följer att γ inte kan vara ett rationellt tal.

5.2 Den regelbundna femhörningen

Den regelbundna femhörningen, på grekiska *pentagonen*, är en av geometrins mest fascinerande figurer. Det gyllene snittet finns på flera ställen i den. Den totala vinkelsumman i en femhörning är $540°$, så hörnvinkeln i en regelbunden femhörning är $540°/5 = 108°$. I figuren är $\triangle ABC$ likbent, så $(\wedge BAC)° = (\wedge BCA)° = (180° - 108°)/2 = 36°$. Vinkeln $\wedge EAD$ är då också $36°$, så

$$(\wedge CAD)° = 108° - 2 \cdot 36° = 36°.$$

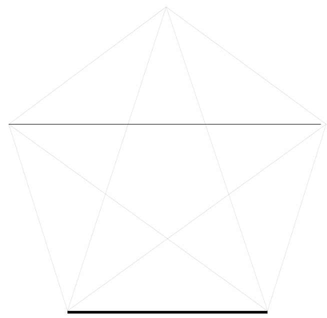
Då är även $(\wedge ACE)° = 36°$, så kongruensfallet VSV ger att $\triangle ABC \cong \triangle AFC$.



Det följer att $|AF| = |FC| = |AB| = |CD|$. Både $\triangle ACD$ och $\triangle CDF$ är likbenta med toppvinkeln 36° och är likformiga enligt SVS. Detta betyder att

$$\frac{|FD|}{|AF|} = \frac{|FD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|AF|}{|AD|}.$$

Likheten mellan ytterleden betyder inget annat än att punkten F delar diagonalen AD i det gyllene snittets proportioner! Eftersom AF är lika lång som femhörningens sida, har vi också visat att förhållandet mellan sidan och diagonalen i en regelbunden femhörning är lika med det gyllene snittet. Om man ritar in alla fem diagonalerna så uppstår en stjärna som brukar kallas ett *pentagram*. Pentagrammet har använts som symbol i många olika sammanhang genom tiderna. Med en spets uppåt är det en Kristussymbol och stjärnans spetsar representerar Kristi fem sår på korset. Med en spets nedåt blir stjärnan istället en symbol för det onda. Det är inuti en pentagon med ett inskrivet pentagram man enligt gamla svartkonstböcker skall stå om man vill frambesvärja Mefistofeles.



5.3 Konstruktioner med passare och linjal

Den grekiska geometrin sysslade mycket med konstruktioner med passare och linjal, dvs att rita olika geometriska objekt eller lösa problem genom att bara använda passare och linjal. Detta syns tydligt redan i Elementa. Passaren och linjalen är de enklaste ritverktygen och det finns förstås en tjusning i att lyckas lösa ett komplicerat problem med så enkla hjälpmedel som möjligt. Ett annat skäl till att man ville använda enbart dessa verktyg var att i synnerhet cirkeln betraktades som den perfekta formen, rent av en gudomlig form. Man kan finna denna åsikt bl a hos Platon (427-347 f Kr), som var en stor auktoritet på praktiskt taget alla filosofiska områden. Passare och linjal kallas ibland också de platonska hjälpmedlen.

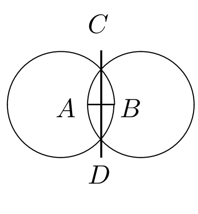
Med linjal menas här en ograderad linjal med bara en kant (den får alltså inte ha två parallella kanter). Passaren skall vara en s k euklidisk passare, vilket innebär att den omedelbart kollapsar när man lyfter den från papperet (eller sandlådan eller vad man nu skriver på för material). Man får således inte "måtta" en sträcka med passaren för att flytta den. Redan i den andra satsen i Elementa visar emellertid Euklides hur man ändå kan flytta sträckor, så detta är ingen allvarlig inskränkning. Det man får göra kan alltså beskrivas så här:

- Givet två punkter får man dra en linje som går genom dem.
- Givet en punkt och en sträcka får man rita en cirkel som har den givna punkten som medelpunkt och den givna sträckan som radie.

Vi skall studera några av alla de konstruktioner man kan göra med de platonska verktygen. Det är faktiskt förvånande hur mycket man kan göra med så enkla medel, som läsaren kommer att se. Sist skall vi diskutera några konstruktioner som inte kan genomföras och som alltså visar på begränsningarna. Flera av konstruktionerna skall vi bara beskriva och i de fallen måste läsaren själv verifiera att de fungerar. Självklart skall man också genomföra konstruktionerna. Det kan för övrigt vara trevligt och nyttigt att fundera över andra sätt att genomföra konstruktionerna – det finns många sätt.

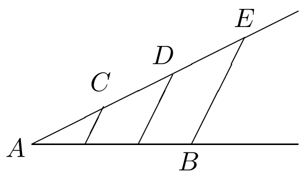
Normaler

Låt en sträcka AB vara given. Rita en cirkel med medelpunkt A och radie AB. Rita en cirkel till med samma radie med med B som medelpunkt. Låt cirklarnas skärningspunkter vara C och D. Då är CD mittpunktsnormalen till AB. Man skall lägga märke till dels att $\triangle ABC$ är likbent, dels att C, B, D är tre på varandra följande hörn i en regelbunden sexhörning med sidan $|AB|$ (varför?). Att man kan konstruera mittpunktsnormaler medför förstås att man kan konstruera den omskrivna cirkeln med passare och linjal. Det är en trevlig övning att göra det.



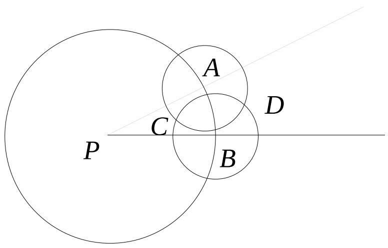
Att konstruera en linje som är vinkelrät mot en given linje L och som går genom en given punkt P klarar man av lätt nu. Rita nämligen en cirkel med medelpunkt P och som skär L. Beteckna skärningspunkterna med A och B och konstruera enligt receptet ovan mittpunktsnormalen till AB. Den löser problemet. Observera att detta speciellt innebär att vi kan konstruera höjderna i en triangel med passare och linjal.

Så långt komna kan vi även konstruera en linje genom en given punkt P och parallell med en given linje L. För vi konstruerar först normalen L' till L genom P och sedan normalen till L' genom P. (Det finns andra sätt att göra detta också.) Vi kan nu dessutom dela en sträcka i godtyckligt många lika långa delar. Vi exemplifierar med tre delar. Låt AB vara en given sträcka och drag en linje L genom A som inte sammanfaller med AB. Avsätt en godtycklig sträcka tre gånger längs L med början i A. Låt delningspunkterna vara C, D, E. Drag BE och konstruera sedan linjer genom C och D som är parallella med BE. Skärningspunkterna mellan dessa och AB ger de sökta delningspunkterna.



Bisektriser

Låt en vinkel med spets P vara given. Sätt passarens spets i P och rita en cirkel med godtycklig radie. Låt skärningspunkterna med vinkelbenen vara A och B. Rita cirklar med samma radie och medelpunkter i A respektive B och antag att deras skärningspunkter är C och D. Då är CD bisektris till vinkeln.

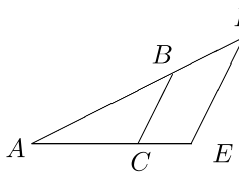


De aritmetiska operationerna med passare och linjal

Att man kan addera och subtrahera med passare och linjal är inte så förvånande, men man kan faktiskt multiplicera och dividera också. Givet är alltså sträckor av längd a och b och vi skall konstruera sträckor av längd ab och a/b ($b \neq 0$). I figuren är DE parallell med BC, så enligt topptriangelsatsen är

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|}, \quad \text{dvs} \quad |AE| = \frac{|AC| \cdot |AD|}{|AB|}.$$

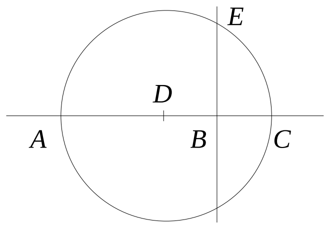
Om vi väljer $|AB| = 1, |AC| = a, |AD| = b$, så får vi $|AE| = ab$ och om vi väljer $|AC| = a, |AD| = 1, |AB| = b$, så får vi $|AE| = a/b$ (tänk igenom vad som händer då $b < 1$ respektive $b \geq 1$).



Att detta går att genomföra med passare och linjal är klart eftersom det bara gäller att konstruera en linje (nämligen DE) genom en viss punkt (D) som är parallell med en given linje (BC).

Kvadratrötter

Ännu mer förvånande är möjligen att man kan konstruera kvadratrötter. Närmare bestämt skall vi lösa problemet att konstruera en kvadrat med samma area som en given rektangel. Om rektangelns sidor är a och b skall vi alltså konstruera sträckan $\sqrt{ab}$. Avsätt på en linje punkter A, B och C (B mellan A och C) så att $|AB| = a$ och $|BC| = b$. Låt D vara mittpunkten på AC och dra en cirkel med medelpunkt D och radie DA. Dra normalen till AC i B och antag att den skär cirkeln i E. Då är $|BE| = \sqrt{ab}$.



För att visa detta noterar man först att $\wedge AEC$ är rät enligt periferivinkelsatsen och därefter att $\triangle ABE \sim \triangle EBC$, varav följer $|BE|/|AB| = |BC|/|BE|$ och $|BE|^2 = |AB| \cdot |BC| = ab$. Radien i cirkeln är $(a + b)/2$ och det är klart att $|BE|$ är kortare än radien, så

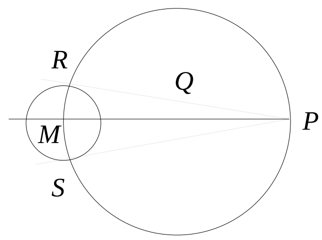
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

vilket kallas olikheten mellan aritmetiskt (högerledet) och geometriskt (vänsterledet) medelvärde. Man ser också att det blir likhet, $\sqrt{ab} = (a + b)/2$, bara då BE är en radie, dvs $a = b$.

Tangenter

Man skulle kanske tycka att det är en enkel match att konstruera tangenterna från en given punkt till en given cirkel – det är ju bara att lägga linjalen vid punkten och anpassa den så att de nätt och jämnt nuddar cirkeln. Tyvärr är det inte en tillåten metod eftersom det står i reglerna att man bara får dra en linje mellan två givna punkter. Här är det bara *en* punkt som är given och den andra måste man på något sätt konstruera.

Låt P vara den givna punkten och M medelpunkt i den givna cirkeln. Låt Q vara mittpunkten på sträckan MP och rita en cirkel $\mathcal{C}$ med medelpunkt i Q och radie QM. Antag att den skär den givna cirkeln i R och S. Då är PR och PS tangenter till den givna cirkeln. Ty MP är en diameter i $\mathcal{C}$, så $\wedge MRP$ och $\wedge MSP$ är räta enligt periferivinkelsatsen, och enligt vad vi sade i avsnitt 6 så tangerar PR och PS den givna cirkeln.



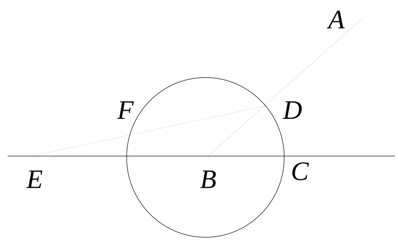
En fortsättning på det här problemet som läsaren kan fundera över är hur man hittar de gemensamma tangenterna till två cirklar.

De klassiska konstruktionsproblemen

Det finns tre mycket kända och berömda geometriska konstruktionsproblem, nämligen vinkels tredelning, kubens fördubbling och cirkelns kvadratur. Till dessa kan man lägga ett fjärde, nämligen konstruktion av regelbundna polygoner, som vi skall diskutera i nästa avsnitt. De här problemen är berömda eftersom de är mycket gamla, men löstes (i negativ riktning) först på 1800-talet.

Att dela en vinkel i två, fyra, åtta, ... lika delar med passare och linjal är inget problem, som vi såg ovan. Men går det att hitta *trisektriserna*, de linjer som delar vinkeln i tre lika delar, med passare och linjal också? Redan under antiken hittade man flera olika lösningar på problemet, men ingen som bara använder de platonska verktygen. Lösningarna man hittade är antingen sådana att de använder otillåtna hjälpmedel eller så leder de bara till ungefärliga tredelningar.

En trevlig men otillåten konstruktion är följande av Arkimedes: Låt $\wedge ABC$ vara den givna vinkeln. Förläng benet BC bakåt och slå en cirkel med godtycklig radie och medelpunkt i spetsen B. Antag att den skär AB i D. Genom D skall vi nu dra en linje som skär cirkeln i en punkt F och BCs förlängning i E, där EF är lika lång som cirkelns radie. Då är $\wedge FEB$ en tredjedel av $\wedge ABC$.



Kontrollera detta! Det är förstås sträckan DE som är omöjlig att konstruera.

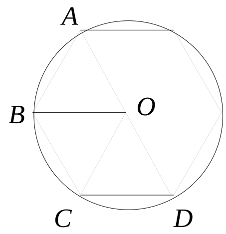
Kubens fördubbling går ut på att man med passare och linjal skall konstruera en kub som har dubbelt så stor volym som en given kub, vilket är detsamma som att man skall konstruera en sträcka med längd $\sqrt[3]{2}$. Man kan uppfatta det som en fortsättning på problemet att konstruera en kvadrat med dubbelt så stor area som en given kvadrat, vilket är enkelt att lösa: Diagonalen i den givna kvadraten är sidan i den sökta. Det finns också en legend om bakgrunden till problemet. Den grekiska ön Delos härjades på 500-talet f Kr ev en pestepidemi och för att få råd om hur man skulle få bukt med den skickades en delegation till Apollons orakel i Delfi. Oraklets svar var att man måste gör Apollons kubformade altare på Delos dubbelt så stort. Huruvida man lyckades stoppa epidemin eller ej förtäljer inte historien, men problemet kallas ibland för det *deliska problemet*.

Vi såg tidigare i det här avsnittet hur man kan konstruera en kvadrat med samma area som en given rektangel eller, som man sade förr i tiden, *kvadrera* rektangeln. Kan man kvadrera en cirkel? Med andra ord, kan man med passare och linjal konstruera en kvadrat med samma area som en given cirkel?

De här problemen är som sagt mycket gamla och genom tiderna hittade man på många fyndiga lösningar, men ingen som uppfyller de stränga platonska kraven. 1837 bevisade en fransk matematiker, Pierre Wantzel, att de två första är olösbara och 1882 visades detsamma om cirkelns kvadratur av tysken Ferdinand von Lindemann. Stanna upp ett ögonblick och fundera på detta! Att problemen är olösbara beror *inte* på att man inte har försökt tillräckligt mycket och givit upp, utan de är verkligen olösbara. En lösning skulle innebära en logisk motsägelse av samma slag som $1 = 0$. Detta hindrar dock inte att det fortfarande finns personer som försöker tredela vinklar mm med passare och linjal och en del av dem skickar sina alster till matematiska institutioner för bedömning, trots att de känner till att det är omöjligt att lösa dem. Förmodligen beror detta på en missuppfattning av vad omöjligt betyder i matematiska sammanhang; det är inte samma slags omöjlighet som när vi säger att det är omöjligt att hoppa tre meter i höjd eller att lära sig latin flytande på en eftermiddag. Här har skolans matematikundervisning utan tvekan en uppgift att fylla.

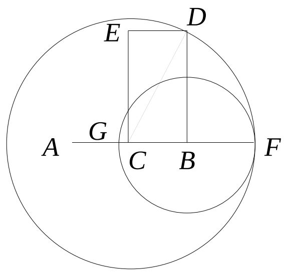
5.4 Regelbundna polygoner

Man säger att en polygon, månghörning på grekiska, är *regelbunden* om alla sidor är lika långa och alla vinklar kongruenta. Exempel är alltså liksidiga trianglar och kvadrater. Vi skall börja med att bevisa att en regelbunden polygon kan inskrivas i en cirkel, dvs att det finns en cirkel som går genom alla hörnen. Låt A, B, C, D vara fyra på varandra följande hörn i polygonen. Dra den omskrivna cirkeln $\mathcal{C}$ till $\triangle ABC$ och låt dess medelpunkt vara O. Enligt SSS är $\triangle OAB \cong \triangle OBC$ och de är dessutom likbenta. Alltså är $\wedge OAB \cong \wedge OBA \cong \wedge OBC \cong \wedge OCB$ och de är alla lika med halva hörnvinkeln i polygonen. Men då är även $\wedge OCD$ lika med halva hörnvinkeln och eftersom $|CD| = |BC|$, så ger SVS att $\triangle OBC \cong \triangle OCD$. Men då är $|OD| = |OB|$, vilket betyder att D ligger på $\mathcal{C}$.



Vilka regelbundna polygoner kan man konstruera med de platonska hjälpmedlen passare och linjal? Vi har sett att man lätt kan konstruera en liksidig triangel med given sida (som för övrigt är den första satsen i Elementa) och en kvadrat är heller inte så svårt att göra. Det är faktiskt enkelt att med hjälp av *en* regelbunden polygon konstruera *oändligt många* andra. För säg att vi har tillverkat en n-hörning. Skriv in den i en cirkel. Låt A och B vara två på varandra följande hörn och konstruera mittpunkten C på AB. Drag en linje från cirkelns medelpunkt genom C och antag att den skär periferin i D. Då är A, D, B tre på varandra följande hörn i en regelbunden $2n$-hörning (varför?). Alltså kan man konstruera regelbundna 6-, 12-, 24-, … -hörningar eftersom man kan konstruera en liksidig triangel. Likaså kan man konstruera regelbundna 2^m-hörningar för alla positiva heltal m.

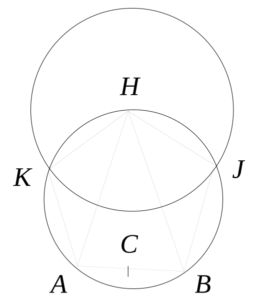
Konstruktionen av den regebundna femhörningen, som finns redan i Elementa, hänger nära samman med det gyllene snittet. Låt en sträcka AB av längd 1 vara given och beteckna dess mittpunkt med C. Konstruera en rektangel $CBDE$ sådan att $|CE| = |AB|$. Rita en cirkel med medelpunkt C och radie CD. Antag att den skär ABs förlängning i F.



Innan vi går vidare kan vi analysera situationen. Cirkelns radie är alltså diagonalen i $CBDE$, som enligt Pythagoras sats har längd $\sqrt{5}/2$. Alltså är $|CF| = \sqrt{5}/2$

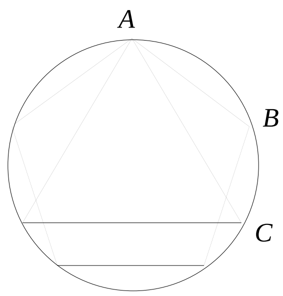
och $|BF| = (\sqrt{5}-1)/2 = \gamma$, det gyllene snittet. Om vi ritar en cirkel med medelpunkt B och radie BF och betecknar dess skärningspunkt med AB med G, så delar punkten G sträckan AB i det gyllene snittets proportioner.

För att fullborda femhörningen ritar vi nu cirklar med medelpunkter i A och B och med radie $|CF|$. Låt oss kalla en av deras skärningspunkter för H. Rita så den omskrivna cirkeln till $\triangle ABH$ och dessutom en cirkel med medelpunkt H och radie $|AB|$. Låt skärningspunkterna mellan denna cirkel och den omskrivna vara J och K. Då är $ABJHK$ en regelbunden femhörning.



Förklaringen till det är att längden av AH är $|CF| = (\sqrt{5}+1)/2 = \gamma+1$, så att $|AB|/|AH| = 1/(\gamma+1) = (\gamma+\gamma^2)/(\gamma+1) = \gamma$, precis som förhållandet mellan sidan och diagonalen i pentagonen skall vara.

I Elementa visas också hur man med hjälp av en regelbunden femhörning och en liksidig triangel konstruerar en regelbunden 15-hörning. För skriv in femhörningen och triangeln i samma cirkel och så att ett av deras respektive hörn sammanfaller.



Medelpunktsvinkeln för kordan BC i figuren är

$$\frac{360^\circ}{3} - \frac{360^\circ}{5} = (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) \cdot 360^\circ = \frac{2}{15} \cdot 360^\circ,$$

vilket är dubbla medelpunktsvinkeln i en regelbunden 15-hörning. Om vi alltså delar den på mitten, så har vi tre på varandra följande hörn i 15-hörningen.

Efter Euklides hände det inte så mycket på mer än 2000 år inom området konstruktion av regelbundna polygoner. År 1796 upptäckte Karl Friedrich Gauss

(1777-1855), hur man kan konstruera en regelbunden 17-hörning med bara passare och linjal. Han har själv berättat hur han såg konstruktionen framför sig när han låg i sin säng och kunde när han stigit upp verifiera att den var riktig. Det är ju lite märkligt att nästa månghörning man lyckas konstruera är en 17-hörning och man undrar förstås vad det beror på. Gauss och Wantzel som vi nämnde i det förra avsnittet gav senare ett fullständigt svar på frågan vilka polygoner som är möjliga att konstruera med de platonska hjälpmedlen. Innan vi beskriver deras sats måste vi införa en speciell typ av primtal. Ett tal av formen $2^{2^n}+1$ (där $n = 0, 1, 2, \dots$) kallas ett *Fermat-tal* efter den franske juristen och matematikern Pierre de Fermat (1601-55). Vi skall använda beteckningen $F_n = 2^{2^n}+1$. De fem första Fermattalen är

$$F_0 = 2^{2^0}+1 = 2+1 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257 \quad \text{och} \quad F_4 = 65537.$$

Gauss och Wantzel bevisade att en regelbunden n-hörning kan konstrueras med bara passare och linjal om och endast om n är ett tal av formen

$$n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k,$$

där $p_1, \dots, p_k$ är *olika Fermat-primtal*, dvs Fermattal som dessutom är primtal. Faktorn 2^m kommer förstås av att vi alltid kan fördubbla antalet hörn, som vi noterade tidigare. De fem första Fermattalen är faktiskt primtal, som man ganska lätt kan kontrollera. Eftersom $F_0 \cdot F_1 = 3 \cdot 5 = 15$, så ser vi att man kan tillverka en regelbunden 15-hörning, vilket ju stämmer bra. Däremot är 7 inte ett tal av Gauss-Wantzels form, så en regelbunden 7-hörning kan man inte konstruera. Talet 9 är visserligen en produkt av Fermat-primtal, nämligen $3 \cdot 3$, men faktorerna är inte olika. En regelbunden 9-hörning går därför inte att konstruera. Både 257- och 65537-hörningarna konstruerades under 1800-talet.

Det sjätte Fermattalet $F_5 = 4294967297$ är inte ett primtal, det är nämligen lika med $641 \cdot 6700417$. Ett av matematikens olösta problem är huruvida det finns fler Fermatprimtal än dem vi såg ovan. Att F_5 är delbart med 641 kan man bevisa med hjälp av en vacker kongruensräkning. Vi har nämligen $641 = 5 \cdot 128 + 1 = 5 \cdot 2^7 + 1$, så $5 \cdot 2^7 \equiv -1 \bmod 641$. Alltså är $5^4 \cdot 2^{28} \equiv (-1)^4 \equiv 1$. Men $5^4 = 625 \equiv -16 \equiv -2^4 \bmod 641$, så $-2^4 \cdot 2^{28} \equiv 1$, vilket betyder att $2^{32} \equiv -1 \bmod 641$. Men då är $F_5 = 2^{32} + 1 \equiv 0 \bmod 641$, vilket är detsamma som att säga att det är delbart med 641.

För den som vill läsa mer om regelbundna polygoner och konstruktion av dem kan följande trevliga artiklar rekommenderas:

Gauss och den regelbundna 17-hörningen av Tord Hall (Elementa 60 (1977):2).

The Simple and Straightforward Construction of the Regular 257-gon av Christian Gottlieb (The Mathematical Intelligencer vol. 21, no. 1, 1999).

5.5 Övningar

1. Diagonalerna i en regelbunden femhörning bildar ett pentagram och inuti pentagrammet uppstår en ny femhörning. Vad är förhållandet mellan sidan

i den och sidan i den stora femhörningen?

2. Beräkna längden av höjden från A mot sidan CD (uttryckt i sidan som längdenhet) i den sista figuren i avsnittet om den regelbundna femhörningen.

3. Bevisa att
$$\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

4. Beskriv hur man inskriver en liksidig triangel i en given cirkel med passare och linjal.

5. Beskriv hur man konstruerar vinklar på 15, 30, 45 och 60 grader med passare och linjal.

6. AB är diameter i en cirkel. Visa hur man konstruerar en punkt C på ABs förlängning sådan att $|CT| = |AT|$, där T är tangeringspunkten mellan cirkeln och tangenten från C.

7. Givet är två sträckor av längd a och b. Beskriv hur man med passare och linjal kan dela en given sträcka AB med en punkt E så att $|AE|/|BE| = a/b$.

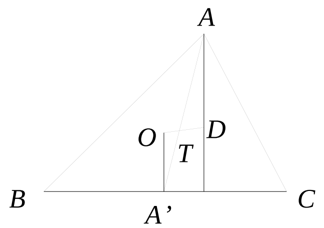
8. Beskriv hur man konstruerar en sträcka med längd $\sqrt{5}$ om en sträcka med längd 1 är given.

6 Några andra vackra resultat

Elementa är naturligtvis inte sista ordet vad gäller geometri i planet, många vackra satser har bevisats efter Euklides. Vi skall titta på två resultat som härrör från alla tiders mest produktive matematiker, Leonhard Euler (1707-83). De har också egenskapen att vara synnerligen förvånande (om man inte är utrustad med en sjusärdeles geometrisk intuition, förstås). Vi har bevisat att medianerna i en triangel skär varandra i tyngdpunkten, sidornas mittpunktsnormaler i omskrivna cirkelns medelpunkt och (de inre) bisektriserna i inskrivna cirkelns medelpunkt. Nu är det dags att bevisa att höjderna också skär varandra i en punkt och att diskutera dess betydelse.

6.1 Höjdernas skärningspunkt och Eulerlinjen

I figuren är O omskrivna cirkelns medelpunkt och T är tyngdpunkten. Linjen AA' är alltså en median, OA' mittpunktsnormal till BC och A' mittpunkt på BC. Det kan inträffa att punkterna O och T sammanfaller. I så fall är AA' även mittpunktsnormal till BC och kongruensfallet SVS ger $\triangle ABA' \cong \triangle ACA'$. Speciellt är $|AB| = |AC|$. På samma sätt får vi $|AB| = |BC|$, så $\triangle ABC$ är i så fall liksidig.



Om triangeln inte är liksidig, så kan vi dra en linje genom O och T. Låt D vara en punkt på OT som inte ligger på samma sida om T som O och sådan att $|TD| = 2 \cdot |OT|$, dvs $|OD| = 3 \cdot |OT|$. Eftersom T delar medianen i förhållandet $1 : 2$, så har vi

$$\frac{|OT|}{|TD|} = \frac{|TA'|}{|TA|} = \frac{1}{2}.$$

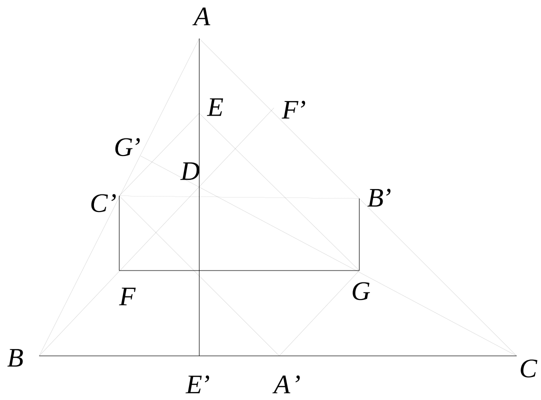
Vidare har vi $\wedge OTA' \cong \wedge DTA$ eftersom de är vertikalvinklar. Enligt likformighetsfallet SVS är tydligen $\triangle TOA' \sim \triangle TDA$. Speciellt är $\wedge OA'T \cong \wedge DAT$, vilket medför att OA' och AD är parallella (AA' är transversal till OA' och AD). Men OA' är vinkelrät mot BC (den är ju mittpunktsnormal), så AD är också vinkelrät mot sidan BC. Detta visar att AD faktiskt är *höjden* från hörnet A mot sidan BC. Alltså ligger punkten D på alla tre höjderna, som tydligen skär varandra i en punkt. Dessutom har vi visat att omskrivna cirkelns medelpunkt, tyngdpunkten och höjdernas skärningspunkt ligger på en rät linje, den s k Eulerlinjen.

6.2 Niopunktscirkeln

Niopunktscirkeln är som namnet antyder en cirkel som går genom inte mindre än nio naturliga och till synes orelaterade punkter på eller inuti en triangel. Enligt Daniel Pedoe, författare till flera kända och klassiska läroböcker i geometri, är niopunktscirkeln den första riktigt upphetsande cirkeln i en grundläggande kurs i geometri.

I figuren nedan är

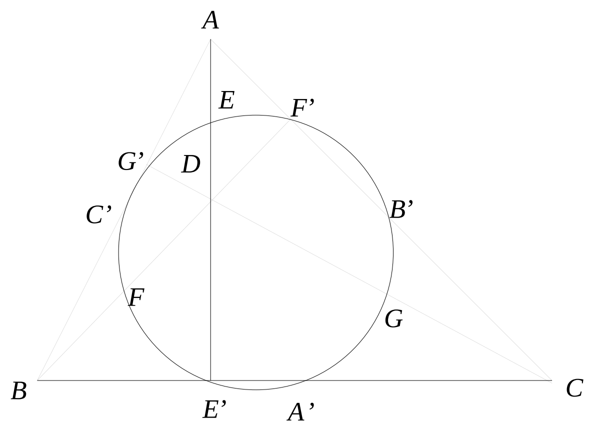
D höjdernas skärningspunkt,
E, F och G mittpunkterna på sträckorna AD, BD respektive CD,
A', B' och C' mittpunkterna på sidorna BC, AC respektive AB,
E', F' och G' fotpunkterna för höjderna från A, B respektive C.



Vi skall bevisa att punkterna $E, F, G, A', B', C', E', F', G'$ ligger på en cirkel och trots den stora mängden punkter att hantera, så är beviset förvånande enkelt. Vi skall först visa att $C'FGB'$ är en rektangel. Punkterna B' och C' är mittpunkterna på AB respektive AC, så likformighetsfallet SVS ger att $\triangle AC'B' \sim \triangle ABC$. Alltså är $\wedge AC'B' \cong \wedge ABC$ och $C'B'$ är parallell med BC. På exakt samma sätt får vi att FG är parallell med BC (betrakta $\triangle BCD$), att $C'F$ är parallell med AE' (betrakta $\triangle ABD$) samt att $B'G$ också är parallell med AE' (betrakta $\triangle ADC$). Fyrhörningen $C'FGB'$ är således i alla fall en parallellogram. Men AE' är vinkelrät mot BC, så $C'F$ är vinkelrät mot FG och då är $C'FGB'$ en rektangel.

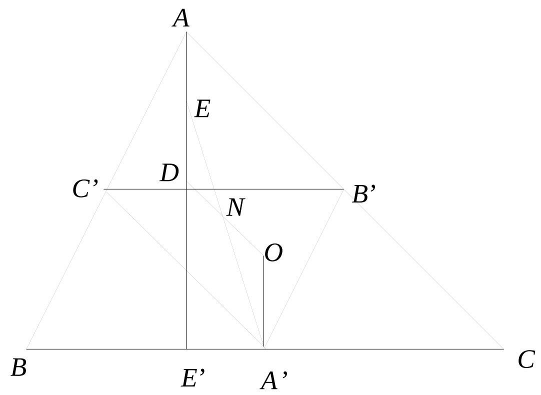
På samma sätt bevisar man att $EC'A'G$ är en rektangel. Mittpunkten på diagonalen $C'G$ (som förstås också är mittpunkt på FB' och EA') är tydligen medelpunkt i en cirkel på vilken punkterna E, C', F, A', G, B' ligger.

Det återstår att visa att E', F', G' också ligger på denna cirkel. Kom ihåg att EA' är diagonal i cirkeln. Eftersom $\wedge EE'A'$ är rät, så ligger E' på cirkeln enligt omvändningen till periferivinkelsatsen. Samma resonemang visar att F' och G' också gör det och beviset är klart.



6.3 Fler förbluffande fakta

Som slutfanfar skall vi beräkna niopunktscirkelns radie och lokalisera dess medelpunkt. I figuren är A', B', C', D och E samma punkter som i figuren ovan och O är omskrivna cirkelns medelpunkt. Enligt vad vi sade ovan är EA' en diameter i niopunktscirkeln. Skärningspunkten mellan EA' och Eulerlinjen OD betecknar vi med N.



Linjen $A'C'$ är parallell med AC och $A'B'$ med AB, så $\wedge BA'C' \cong \wedge C, \wedge B'A'C \cong \wedge B$. Alltså är $\wedge C'A'B' \cong \wedge A$ och med ett analogt resonemang visar man att de två övriga vinklarna i $\triangle A'B'C'$ också är kongruenta med motsvarande i $\triangle ABC$. Alltså är de två trianglarna likformiga och enligt konstruktionen av $\triangle A'B'C'$ är skalan lika med $1/2$. Niopunktscirkeln går genom hörnen i $\triangle A'B'C'$ och är tydligen den omskrivna cirkeln till $\triangle A'B'C'$. Men då är dess radie hälften av radien i den omskrivna cirkeln till $\triangle ABC$.

Mittpunktsnormalen $A'O$ till sidan BC är höjd i $\triangle A'B'C'$, så O är höjdernas skärningspunkt i $\triangle A'B'C'$. Alltså är $A'O$ hälften så lång som AD, dvs $|A'O| = |ED|$. Linjerna AE' och OA' är parallella, så $\wedge DEN \cong \wedge NA'O$ och $\wedge NDE \cong$

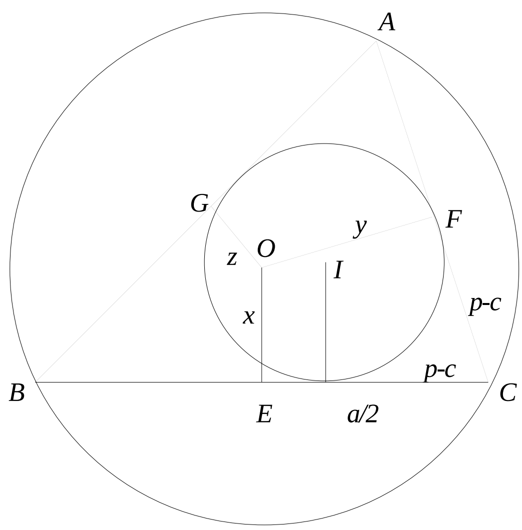
$\wedge A'ON$. Enligt kongruensfallet VSV är $\triangle DNE \cong \triangle ONA'$. Vi får således

$$|EN| = |NA'| \quad \text{och} \quad |DN| = |NO|.$$

Den vänstra likheten betyder att N är medelpunkt i niopunktscirkeln och den högra att medelpunkten ligger på Eulerlinjen och mitt emellan höjdernas skärningspunkt D och omskrivna cirkelns medelpunkt O.

6.4 Avståndet mellan de in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter

Det finns en elegant formel för avståndet mellan in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter som vi skall härleda. Härledningen innehåller flera i sig intressanta delresultat.



Låt I och O vara in- respektive omskrivna cirkelns medelpunkt och R_I respektive R_O deras radier. I figuren är x, y och z höjderna från O och E, F och G deras fotpunkter, dvs mittpunkterna på triangelns sidor. Vi sätter $a = |BC|$, $b = |AC|$ och $c = |AB|$. Vi har $|\triangle BCO| = ax/2$ osv, vilket ger

$$ax + by + cz = 2T,$$

där $T = |\triangle ABC|$. $OECF$ är en cirkelfyrhörning eftersom vinklarna $\wedge OEC$ och $\wedge OFC$ räta och Ptolemaios sats ger $|OE| \cdot |FC| + |OF| \cdot |EC| = |OC| \cdot |EF|$. Men $\triangle FEC \sim \triangle ABC$ i skalan $1/2$, så $|EF| = z/2$. Vidare är $|OC| = R_O$ och alltså har vi $bx + ay = cR_O$. Om vi adderar sambanden

$$\begin{aligned} bx + ay &= cR_O \\ cy + bz &= aR_O \\ cx + az &= bR_O \\ ax + by + cx &= 2T \end{aligned}$$

så får vi $(a+b+c)(x+y+z) = (a+b+c)R_O + 2T$ och alltså

$$x+y+z = R_O + \frac{2T}{a+b+c} = R_O + R_I$$

eftersom $R_I = T/p$. Härav får vi

$$\begin{aligned}(b+c-a)x &= (bx+ay)+(cx+az)-a(x+y+z)\\ &= cR_O + bR_O - a(R_O+R_I) = (b+c-a)R_O - aR_I,\end{aligned}$$

med resultat

$$x = R_O - \frac{aR_I}{2(p-a)}, \quad y = R_O - \frac{bR_I}{2(p-b)}, \quad z = R_O - \frac{cR_I}{2(p-c)}.$$

Sätt $d = |OI|$. Enligt Pythagoras sats är

$$\begin{aligned}d^2 &= (\frac{a}{2}-(p-c))^2 + (x-r)^2 = \frac{(b-c)^2}{4} + x^2 - 2xr + r^2\\ &= \frac{(b-c)^2}{4} + R_O^2 - \frac{a^2}{4} - 2R_I(R_O - \frac{aR_I}{2(p-a)}) + R_I^2\\ &= R_O^2 - 2R_OR_I + \frac{pR_I^2}{p-a} - \frac{a^2-(b-c)^2}{4}.\end{aligned}$$

Om vi använder $R_I = T/p$ och Herons formel, så får vi

$$\begin{aligned}\frac{pR_I^2}{p-a} &= \frac{p^2(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2(p-a)} = (p-b)(p-c)\\ &= \frac{(a+(b-c))(a-(b-c))}{4} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4}.\end{aligned}$$

Alltså är

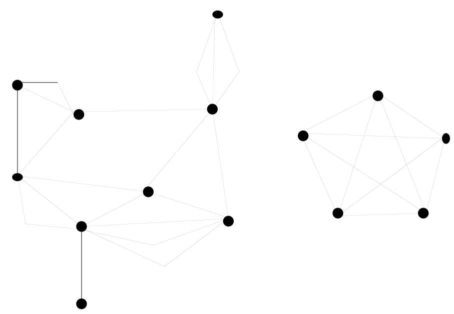
$$d^2 = R_O^2 - 2R_OR_I.$$

7 Eulers polyederformel och de platonska kropparna

En polyeder är en kropp i rummet som begränsas av sidoytor som alla är polygoner. Exempel är tetraedern och kuben, men klotet och konen är inte polyedrar. Vi skall bevisa *Eulers polyederformel*, som är ett samband mellan antalet sidoytor, kanter och hörn i vissa typer av polyedrar. Formeln skall vi därefter använda för att studera de platonska kropparna, dvs de regelbundna polyedrarna. Eulers polyederformel brukar inte räknas till den euklidiska geometrin, men det tillhör ändå den geometriska allmänbildningen att känna till den. De regelbundna kropparna måste sägas tillhöra den euklidiska geometrin eftersom de finns i Elementas trettonde bok.

7.1 Något om grafer

Vi skall starta i en helt annan ände än den geometriska, nämligen med grafteori. En graf består av ett antal punkter, som kallas *hörn*, och ett antal linjer, *kanter*, som förbinder hörnen med varandra. En kant förbinder två hörn med varandra och mellan två hörn kan det gå flera kanter. Nedan finns två exempel på grafer. De svarta prickarna är hörn, lägg märke till att det mellan några av hörnen i figuren till vänster går fler kanter och att diagonalernas skärningspunkter i figuren till höger inte är hörn.



Vi skall studera grafer som är sammanhängande, dvs som är sådana att man kan gå från vilket hörn som helst till vilket annat hörn som helst längs kanter (man kan ju betrakta de båda graferna ovan som *en* graf med två separata delar, men den är i så fall inte sammanhängande). Vi skall också anta att inga kanter korsar varandra som i grafen till höger. En graf av den här typen skall vi kalla en plan sammanhängande graf.[7] En plan sammanhängande graf delar planet i ett antal områden, som vi skall kalla sidoyta. Vi betraktar även området utanför grafen som en sidoyta, liksom området mellan två kanter som går mellan samma hörn. Antalet sidoytor i den vänstra grafen är då 12. Vi skall beteckna antalet sidoytor med S, antalet hörn med H och antalet kanter med K. För en graf av

[7]Det kan mycket väl finnas andra sätt att rita en viss graf, t ex den högra, i vilken kanterna inte korsar varandra. Det här är dock inte en strikt redogörelse för grafteori, utan vi kommer att lita på åskådning och intuition.

den sort som vi studerar skall vi bevisa sambandet

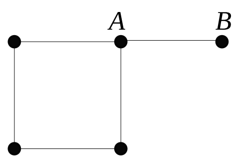
$$S + H - K = 2.$$

I den vänstra figuren är alltså $S = 12, H = 9, K = 19$, så formeln stämmer i alla fall här (problemet med grafen till höger är att det inte går att säga hur många sidoytor den begränsar).

En plan sammanhängande graf kan byggas upp från en graf med bara ett enda hörn och inga kanter genom att man successivt lägger till hörn och kanter. För grafen med bara ett enda hörn och inga kanter är $S = H = 1$ och $K = 0$, så $S + H - K = 2$.

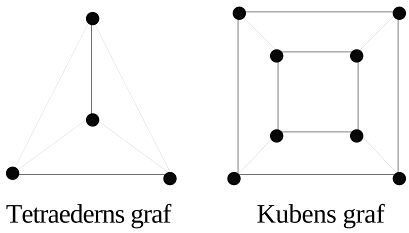
När vi lägger till ett nytt hörn måste vi förbinda de två hörnen med en kant och vi får grafen till höger. För den är $S = 1, H = 2, K = 1$ och alltså $S+H-K = 2$.

(Observera att en kant måste gå mellan två hörn, den kan inte sluta i bara intet.) Om man har en plan sammanhängande graf för vilken sambandet $S+H-K = 2$ gäller och lägger till en ny kant, så ökar S och K med 1 medan H är oförändrat, så $S+H-K = 2$ gäller även för den nya grafen (det spelar ingen roll om den nya kanten går mellan två hörn som redan är direkt förbundna med varandra med en kant eller mellan hörn som inte är det). Om man lägger till ett nytt hörn och en kant som förbinder det nya hörnet med något hörn i den ursprungliga grafen (i figuren är det nya hörnet B som förbinds med A i den ursprungliga grafen), så ökar H och K med 1, medan S nu är oförändrat. Alltså gäller fortfarade $S + H - K = 2$.



Eftersom alla plana sammanhängande grafer kan byggas upp på detta sätt så är beviset klart.

Vi skall nu tillämpa formeln ovan på polyedrar. Vi antar i fortsättningen att polyedrarna är sammanhängande (dvs att de inte består av flera “delpolyedrar”) och att det inte finns några hål eller tunnlar genom dem. Till en sådan polyeder kan man associera en plan sammanhängande graf genom att helt enkelt rita hörnen i polyedern på papperet och förbinda de hörn med kanter som är förenade av kanter i polyedern. Graferna för tetraedern och kuben ser ut som i figuren nedan.



Lägg märke till att en av sidoytorna i polyedern motsvaras av det oändliga området som omger grafen. Denna associering av en polyeder med en viss graf visar att för en polyeder gäller också sambandet $S + H - K = 2$, vilket i det här sammanhanget kallas *Eulers polyederformel*.

7.2 De regelbundna polyedrarna

En polygon säger vi är regelbunden om alla sidor är lika långa och alla vinklar kongruenta. En regelbunden polyeder i rummet definieras så här:

- Alla sidoytor är kongruenta regelbundna polygoner.
- I alla hörn möts lika många sidoytor och lika många kanter.

Det är inte svårt att direkt ur definitionen se att det bara kan finnas högst fem regelbundna polyedrar, men vi skall istället använda Eulers polyederformel för att analysera dem. De regelbundna polyedrarna har varit kända i många tusen år och man har hittat arkeologiska föremål i form av dem. Vad de har använts till vet man inte riktigt, kanske har det varit som tärningar. Ibland kallas de för de platonska kropparna eftersom Platon diskuterar dem i sin dialog *Timaios*, där de sätts i samband med de fyra elementen.[8] En regelbunden polyeder ger upphov till en graf i vilken alla sidoytor omges av n kanter och det i varje hörn möts q kanter. Vi skall analysera vilka sådana grafer det finns och det kommer att visa sig att det finns grafer av den här regelbundna typen som inte härstammar från regelbundna polyedrar.

Varje sida i grafen har n kanter, men eftersom varje kant gränsar till två sidoytor, så måste

$$nS = 2K. \tag{1}$$

Varje kant förbinder två hörn, så vi får också

$$qH = 2K. \tag{2}$$

[8] Eftersom elementen ansågs vara fyra och inte fem blir det en kropp över. Platon menade att den mest mystiska av dem, dodekaedern, symboliserade det femte elementet, på latin *quinta essentia* (kvintessensen), och även universum självt. De regelbundna polyedrarna har senare förknippats med temperamenten, andevarelser mm. De är också vanliga i konsten, bl a hos Dürer, och förekommer som kristallformer i naturen.

Om vi sätter in $S = nK/2, H = 2K/q$ i sambandet $S + H - K = 2$ så får vi

$$\frac{2K}{n} + \frac{2K}{q} - K = 2$$

och efter division med $2K$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{K}. \tag{3}$$

Det är en nyttig övning i algebra att analysera den här ekvationen, som har inte mindre än tre obekanta. Läsaren måste själv fylla i en del detaljer i analysen nedan.

Vi har för det första $n > 0$. Om q vore 0, så vore K lika med 0 enligt (2) och då skulle $S = 0$ enligt (1), vilket är omöjligt. Vi behandlar först fallen $q = 1$ och $q = 2$. Om $q = 1$ så ger (3) $1/2 + 1/n = 1/K$, vilket ger $n = 2, K = 1$ och $H = 2, S = 1$. Detta är grafen i figur 2. Om $q = 2$ så får vi istället $n = K = H$ och $S = 2$, vilket betyder n hörn förenade i en ring med n kanter. I rummet kan man tänka sig detta som en regelbunden n-hörning med två sidoytor (en upp- och en nersida), en "dieder".

Vi delar nu upp i olika fall beroende på vad n är (lägg märke till att q är minst 3). Rita figurer själv!

$\underline{n = 1}$: Ekvation (3) ger $1/2 + 1/q = 1/K$ som har den enda lösningen $q = 2$ och den har vi behandlat ovan.

$\underline{n = 2}$: Nu ger (3) att $q = K$ och vi får $H = 2, S = K$. Här har vi alltså två hörn förenade av n kanter. I rummet kan man tänka på klyftorna i en apelsin.

$\underline{n = 3}$: Här får vi $1/q = 1/6 + 1/K$ och nu blir det genast lite intressantare. Lägg märke till att sidoytorna nu är trianglar. Möjligheterna är

$q = 3$	$K = 6$	$H = 4$	$S = 4$	(tetraeder)
$q = 4$	$K = 12$	$H = 6$	$S = 8$	(oktaeder)
$q = 5$	$K = 30$	$H = 12$	$S = 20$	(ikosaeder)

$\underline{n = 4}$: Nu blir $1/q = 1/4 + 1/K$. Eftersom $q > 2$ så får vi bara en möjlighet, $q = 3, K = 12, H = 8, S = 6$, vilket motsvarar en kub.

$\underline{n = 5}$: Vi får $1/q = 3/10 + 1/K$. Då återigen $q > 2$ så måste $q = 3, K = 30, H = 20, S = 12$ och vi har en dodekaeder.

$\underline{n \geq 6}$: Ekvation (3) ger $1/2 + 1/K = 1/n + 1/q \leq 1/6 + 1/q$ och alltså $1/3 + 1/K \leq 1/q$. De enda möjligheterna är $q = 1$ och $q = 2$, vilka vi redan har studerat.

Det finns mycket mer att säga om både de regelbundna polyedrarna och andra kroppar i rummet. En naturlig fråga är vad som händer om man tillåter två olika slags sidoytor istället för bara en, som vi har gjort. Arkimedes analyserade det fallet och fann att det finns 13 sådana s k halvregelbundna kroppar. En av dem är den vanliga fotbollen som begränsas av 12 femhörningar och 20 sexhörningar.

7.3 Övningar

1. Rita graferna till alla de regelbundna polyedrarna.

2. Tillverka de regelbundna polyedrarna i papp. Tillverka gärna någon halvregelbunden också, t ex Arkimedes fotboll.

8 Avslutning

I det här avslutande avsnittet skall vi diskutera den logiska uppbyggnaden av geometrin och den moderna matematikens syn på Elementa samt det som nu kallas den *axiomatiska metoden*. Vi skall också säga något om geometrins historia, särskilt i relation till det så kallade *parallellpostulatet*.

8.1 Den logiska uppbyggnaden av geometrin

Som läsaren inte har undgått att märka så vimlar det av bevis i hela kompendiet; de flesta påståenden och satser åtföljs av ett bevis, men i några fall, bl a i samband med kongruens- och likformighetsfallen, har vi nöjt oss med en intuitiv motivering och hänvisat till åskådningen. Man kan emellertid inte bygga upp en strikt matematisk teori på det sättet. Inga detaljer, hur små de än må vara, får överlämnas till åskådning eller intuition. Kongruens- och likformighetsfallen *kan* bevisas från enklare påståenden, men här har vi alltså hoppat över dessa bevis. Men hur är det med dessa enklare påståenden; kan de bevisas med hjälp av andra, ännu enklare påståenden? Och hur är det i sin tur med dessa? Så kan man fortsätta fråga, men om man skall komma framåt så måste man ju sluta fråga någon gång och nöja sig med att några grundläggande förutsättningar och påståenden måste förbli obevisade.

Det är så Elementa är uppbyggd. Euklides valde ut ett antal grundläggande påståenden och från dessa, som han kallade *axiom* och *postulat*, byggde han upp geometrin (och bevisade alltså kongruens- och likformighetsfallen, bland mycket annat). Euklides har alltså två typer av grundläggande förutsättningar. Axiomen är allmänna påståenden som storheters likhet och olikhet, medan postulaten är geometriska.

Euklides axiom

1. Storheter som är lika med samma storhet är inbördes lika (dvs om $a = b$ och $b = c$, så är $a = c$).
2. Om lika adderas till lika så är summorna lika (om $a = b$, så är $a+c = b+c$).
3. Om lika subtraheras från lika, så är differenserna lika.
4. Storheter som sammanfaller är lika.
5. Det hela är större än delen.

Euklides postulat

1. Genom två punkter går en linje. (Anmärkning: Euklides tycks dock mena en *och endast en* linje.)
2. Varje sträcka kan förlängas obegränsat till en linje.

3. Givet en punkt och en sträcka kan man rita en cirkel med punkten som medelpunkt och sträckan som radie.
4. Alla räta vinklar är kongruenta.
5. Om en linje skär två andra linjer och de båda inre vinklarna på samma sida om den skärande linjen tillsammans blir mindre än två räta vinklar, så kommer de båda linjerna om de förlängs att skära varandra på den sida om den skärande linjen som de två vinklarna som är mindre än två räta ligger.

Vi skall återkomma till det invecklade femte postulatet lite längre fram. Euklides börjar sin framställning med ett antal definitioner, de första gäller vad en *punkt* och en *linje* är. Han skriver att *en punkt är det som inte kan delas* (eller har några delar) och att *en linje är längd utan bredd.* Utifrån definitionerna, axiomen och postulaten byggs så geometrin upp. Meningen med framställningen var att den skulle vara strikt logisk, dvs att varje påstående skulle följa med logisk nödvändighet från axiomen, postulaten samt de resultat som tidigare bevisats. Vi har inte följt samma stränga principer i det här kompendiet, utan lämnat mer åt intuitionen och åskådningen, främst för att texten annars skulle ha blivit betydligt längre och mycket mer svårläst.

Senare tiders matematiker har konstaterat att Eukildes syfte var gott, men att han inte nådde ända fram. Elementa är inte logiskt sammanhängande, utan det finns många luckor i resonemangen. Redan definitionerna är problematiska. En punkt definieras exempelvis genom att man talar om vad den *inte* är och det duger inte. Euklides litar till åskådningen även när det gäller fundamentala begrepp som vad det innebär att linjer skär varandra och att en punkt ligger mellan två andra. Allvarligare än detta är kanske att han utnyttjar egenskaper hos de geometriska objekten som inte följer av förutsättningarna, t ex att om en linje går genom en punkt inuti en cirkel, så skär den cirkeln i två punkter. Man skall emellertid inte klandra honom för detta, det är i själva verket utomordentligt svårt att göra en strikt uppbyggnad av geometrin enligt det euklidiska idealet och det var först i slutet av 1800-talet som det gjordes. Den mest kända strikta framställningen av geometrin härrör från den tyske matematikern David Hilbert (1862-1943), en av den moderna matematikens portalfigurer.

8.2 Den axiomatiska metoden

Man skall som sagt inte klandra Euklides för att det finns brister i Elementa, utan tvärtom var Elementa en enastående prestation. Vad Euklides uppfann var det som nuförtiden kallas *den axiomatiska metoden* och som nu är ett slags ideal för hur matematikens teorier skall vara uppbyggda.[9] Enligt detta ideal skall matematiska teorier börja med ett antal grundläggande förutsättningar, som

[9] Redan Aristoleles, som levde något innan Euklides, menade att vetenskapen skall byggas upp enligt detta schema, men det var Euklides som genomförde programmet för matematikens del. Förmodligen var han påverkad av Aristoteles idéer.

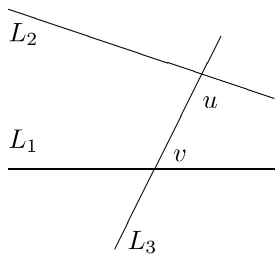
inte bevisas. I dem definieras de begrepp man kommer att använda och vilka relationer som råder mellan dessa. De kan betraktas som ett slags spelregler inom vilka man måste hålla sig när teorin byggs upp. Grundförutsättningarna kallas nuförtiden axiom (ordet postulat används nästan inte alls i matematiska sammanhang numera). Själva ordet kommer av grekiskans *axioma*, som betyder åsikt, uppskattning eller värdering. Eftersom mycket litet är känt om Euklides och hans syften med Elementa, är det svårt att uttala sig om hans egen syn på axiomen och postulaten, men förmodligen såg han dem som självklara påståenden om verkligheten, vilket skiljer hans syn från den moderna matematikens. Axiomen i modern mening bevisas inte, men de skall heller inte uppfattas som självklart sanna utsagor om verkligheten. Man har därför stor frihet när man väljer sina axiom, det enda kravet är egentligen att de inte skall motsäga varandra eller ge upphov till några motsägelser. Huruvida axiomen ger upphov till en intressant teori är dock en annan sak och inte alls säkert.

Det framgår av den moderna synen på axiom och axiomatisk metod att matematiken inte kan uttala sig om hur verkligheten är beskaffad. Varje gång matematiken verkar påstå något om hur världen fungerar eller är uppbyggd så är det fråga om att man har gjort en *matematisk modell* av något fenomen.

Den logisk-filosofiska forskningen om den axiomatiska metodens fördelar och begränsningar började under 1800-talet och pågår fortfarande. Ett svårt och inte okontroversiellt problem är om hela matematiken *kan* axiomatiseras.

8.3 Parallellpostulatet och icke-euklidisk geometri

Euklides femte postulat, det s k *parallellpostulatet*, skiljer sig från de första fyra genom sin invecklade formulering. Låt oss börja med att analysera det. Två linjer L_1 och L_2 skärs alltså av en tredje L_3: I figuren är u och v sammanlagt mindre än två räta vinklar, dvs 180°. Det som sägs i postulatet är då att L_1 och L_2 skär varandra någonstans på den sida om L_3 som u och v ligger på (i figuren till höger om L_3).



Det finns många logiskt ekvivalenta[10] formuleringar av parallellpostulatet. Den mest kända är förmodligen följande:

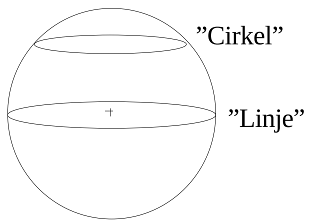
[10]Att de är logiskt ekvivalenta betyder att det ena följer logiskt av det andra och omvänt.

Genom en punkt utanför en linje kan man dra en och endast en linje som är parallell med den givna linjen.

Parallellpostulatet i den här formuleringen använde vi exempelvis när vi bevisade att triangelns vinkelsumma är 180 grader. En annan ekvivalent formulering är att *det existerar en rektangel* och en tredje att *arean av en triangel kan vara hur stor som helst.* I Elementa används inte parallellpostulatet förrän en god bit in i bok I (första gången är i Proposition 29, som är satsen om alternatvinklar vid parallella linjer) och det verkar som om Euklides själv var skeptisk till postulatet. Under mer än 2000 år undrade många matematiker om det i själva verket inte var så att parallellpostulatet kan bevisas med hjälp av de andra postulaten.[11] Det var först i början av 1800-talet som man fick fullständig klarhet i hur det förhåller sig och insåg *att parallellpostulatet är oberoende av de andra, dvs att det inte kan bevisas med hjälp av dem.*

Beviset för att parallellpostulatet är oberoende av de andra postulaten är en matematisk och filosofisk pärla. Det visar sig nämligen att det finns andra logiskt oantastliga tolkningar av grundbegreppen linje, cirkel osv som uppfyller de fyra första postulaten, *men inte det femte.* Alltså kan det inte följa av de andra. Dessa andra fullt möjliga tolkningarna av begreppen och de fyra första axiomen kallas *icke-euklidiska* geometrier. I dessa gäller alltså inte parallellpostulatet.

Uttrycket icke-euklidisk geometri väcker kanske associationer till något mystiskt, nästan ockult, men är faktiskt inte ett dugg underligt. Vi skall visa ett exempel som visserligen inte riktigt är en icke-euklidisk geometri, men som kommer väldigt nära, nämligen geometrin hos en ytan på ett klot, t ex jordytan. Vi måste först tala om hur begreppen linje osv skall tolkas i den här geometrin. Med *linje* menar vi en sådan cirkel på ytan som man får genom att skära klotet med ett plan som går genom klotets medelpunkt. Med *cirkel* menar vi skärningen mellan klotet och ett plan vilket som helst (det behöver således inte gå genom medelpunkten). Exempel på “linjer” på jordytan är ekvatorn och meridiancirklarna (de cirklar som går genom nord- och sydpolen). “Cirklar” på jordytan är t ex de cirklar som består av alla punkter på samma breddgrad.



Den här geometrin uppfyller inte riktigt det första av Euklides postulat eftersom det går oändligt många linjer genom två antipodala punkter.[12] Det går att

[11] I en axiomatisk teori vill man förstås att inget av axiomen skall kunna bevisas med hjälp av de andra, i så fall är det ju överflödigt och kan uteslutas.

[12] Två punkter på en sfär säges vara antipodala om de ligger mitt emot varandra, dvs på en rät linje genom medelpunkten. Nord- och sydpolerna är antipodala.

reparera detta, men vi skall inte bekymra oss om det. Det viktiga är istället att de andra postulaten utom parallellpostulatet är uppfyllda. Genom en punkt utanför en linje kan man inte dra någon linje alls som är parallell med den givna, eftersom alla linjer skär varandra. Mer mystisk än så behöver inte en icke-euklidisk geometri vara. Genom att rita några figurer kan läsaren se att det i den här geometrin finns trianglar som exempelvis har vinkelsumman 270° (man kan visa att vinkelsumman i en triangel alltid är större än 180°). Arean av en triangel kan naturligtvis inte bli större än klotets area och det finns faktiskt inga rektanglar!

I den ovan beskriva geometrin kan man inte dra någon linje parallell med en given genom en punkt utanför den givna linjen. Det finns andra geometrier som så att säga bryter mot parallellpostulatet åt andra hållet: i dem kan man dra flera sådana linjer. Den förra typen kallas *elliptisk* och den senare *hyperbolisk* geometri. Icke-euklidiska geometrier är viktiga både i matematiken och i fysiken, i synnerhet i relativitetsteorin som är en teori om rummets och tidens geometri.[13]

8.4 Lite historia

Man vet nästan ingenting om Euklides liv mer än att han levde ca 330-275 f Kr i Alexandria[14] och att han möjligen studerade i Aten hos elever till Platon. Han verkade vid *Museion*, som var ett slags universitet grundat av farao Ptolemaios I (samtida med Euklides). Han skrev fler böcker än Elementa varav en del finns bevarat (i avskrifter, inget finns i original). Den äldsta kända avskriften av Elementa är från 400-talet och den förvaras i Vatikanbiblioteket. Den första svenska översättningen gjordes av astronomen Mårten Strömer i Uppsala 1744.

Elementa är den latinska översättningen av det grekiska *Stoicheia*, som betyder (matematikens) alfabet. Man vet inte riktigt vad syftet med Elementa var, om Euklides ville sammafatta sin tids matematik eller om den var tänkt som en lärobok. Som lärobok användes den ända till 1700-talet och de geometriböcker som användes i skolorna ännu i mitten av 1900-talet var inspirerade av Elementa. Det sägs ibland att den är den näst Bibeln mest spridda boken någonsin. Elementa omfattar 13 böcker eller kapitel och innehåller både geometri och talteori. Här är en översikt över innehållet:

Bok I Definitioner, axiom och postulat. Grundläggande geometri, bl a kongruensfallen. Avslutas med Pythagoras sats och dess omvändning.

Bok II Kvadrering av olika områden, dvs hur man konstruerar kvadrater med samma area som vissa figurer.

Bok III Cirkelgeometri, bl a periferivinklar och tangenter.

[13] I relativitetsteorin smälter rum och tid samman och bildar *rumtiden*.

[14] Alexandria grundades av Alexander den store 332 f Kr som en grekisk stad. Den var under många hundra år en av de viktigaste kultur- och vetenskapsmetropolerna i den antika världen.

Bok IV In- och omskrivna cirklar. Den regelbundna femhörningen.

Bok V Eudoxos proportionslära.

Bok VI Likformighet.

Bok VII-IX Aritmetik och talteori. Här finns bl a Euklides algoritm, beviset för att det finns oändligt många primtal, aritmetikens fundamentalsats. Allt är framställt i geometrisk form.

Bok X Inkommensurabla storheter. Boken behandlar bl a den s k uttömningsprincipen, med vars hjälp man kan beräkna arean av en del kroklinjiga figurer.

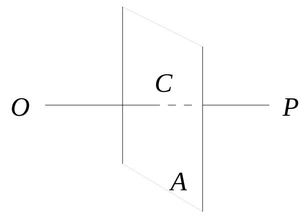
Bok XI Rymdgeometri.

Bok XII Beräkning av volymer, bl a av koner och klot.

Bok XIII Det gyllene snittet och de regelbundna polyedrarna.

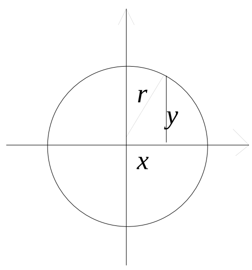
Elementa är ett omfattande verk, men den innehåller naturligtvis inte *all* geometri. Efter Euklides fortsatte geometrin att utvecklas i olika riktningar. Apollonius från Perga (ca 260-190 f Kr) undersökte t ex kägelsnitten, dvs ellipser, parabler och hyperbler (Euklides lär också ha skrivit ett arbete om dessa kurvor, men det finns inte bevarat). Trigonometrin grundlades av Hipparchos från Nicaea (ca 180-125 f Kr) och utvecklades av Menelaos (ca 100 e Kr) och Ptolemaios (ca 150 e Kr). Menelaos studerade även geometrin på en sfär (som vi började göra ovan) och lade grunden till den sfäriska trigonometrin, vilken är av stor betydelse för sjöfart och navigation.

En helt ny typ av geometri började utvecklas under renässansen i samband med upptäckten av *perspektivet.* Det hade funnits perspektivmåleri mycket tidigare än så, men det är först i början av 1400-talet som man inser hur man skall avbilda en tredimensionell verklighet på en tvådimensionell yta – målarduken – så att bilden får djup och ser "riktig" ut. I den egyptiska konsten användes värdeperspektiv, vilket innebär att viktiga och framstående personer är större än andra, t ex slavar. Under medeltiden målade man ibland bilder där föremålen delvis skymmer varandra för att det skall synas vilka som ligger närmare respektive längre bort (spelkortsperspektiv). Man skall också minnas att konsten inte måste ha som mål att avbilda perspektiviskt riktigt. Filippo Brunelleschi (1377-1446), Leon Battista Alberti (1404-72) och Leonardo da Vinci (1452-1519; Nattvarden i Santa Maria delle Grazie, Milano, är en av de mest berömda perspektivmålningarna) är några av dem som upptäckte perspektivet. Vad det hela går ut på är hur föremål avbildas under *centralprojektion.* I figuren till höger är A målarduken, O ögat och P en punkt i rummet. Linjen genom O och P skär A i punkten C. Då kallas C *projektionen* av P på A med avseende på projektionscentrum O.



Hur avbildas geometriska objekt och föremål i rummet under centralprojektion? Vi vet ju alla att två parallella vägrenar tycks smälta samman i en punkt på horisonten. Hur kan man förklara det? Var i tavlan finns den punkten? Hur hittar man horisontlinjen? Hur skall man avbilda ett rutigt golv perspektiviskt riktigt? Det här är några av de problem av matematisk art som renässanskonstnärerna ställdes inför och lyckades lösa. Perspektivmåleriet gav upphov till den *projektiva geometrin* som började utvecklas under 1600-talet. Den sysslar med vad som händer vid olika typer av projektioner. Om kongruens, parallellitet, likformighet osv är centrala begrepp i den euklidiska geometrin, så är "skärning mellan linjer", "ligga på en rät linje" nyckelord i den projektiva geometrin.

Under 1600-talet började ett nytt sätt att se på geometri utvecklas, nämligen den *analytiska geometrin.* Idén är att man inför ett koordinatsystem och studerar de ekvationer som de geometriska objekten uppfyller. Det är alltså i den analytiska geometrin som man talar om "ekvationen för en rät linje" osv. Låt oss bara ta ett exempel. I ett vanligt koordinatsystem ritar vi en cirkel med medelpunkt i origo och radie r. Om en punkt (x, y) ligger på cirkeln så ger Pythagoras sats att $x^2 + y^2 = r^2$ och omvändningen gäller också. Sambandet $x^2 + y^2 = r^2$ kallas cirkelns ekvation.



Upptäckten av den analytiska geometrin brukar tillskrivas fransmannen René Descartes (på latin Cartesius, 1596-1650), men historien är mer komplicerad än så. Descartes kallades av drottning Kristina till Stockholm för att lära henne filosofi, men han dog av lunginflammation på slottet den 11 februari 1650. I Adolf Fredriks kyrka finns ett monument av Sergel över honom, hans första viloplats var nämligen Adolf Fredriks kyrkogård.

Den icke-euklidiska geometrins upptäcktes i början av 1800-talet. De första artiklarna om existensen av icke-euklidiska geometrier publicerades av ryssen Nikolaj Lobatjevskij (1829-30) och ungraren Johann Bolyai (1831). Dessa handlar båda om hyperbolisk geometri. Redan 30 år tidigare hade förmodligen Gauss insett att det existerar sådana geometrier, men han publicerade aldrig sin upptäckt.

Det bevisas fortfarande ett och annat nytt resultat i ”elementär” geometri, även om ämnet euklidisk geometri i planet inte är det som tilldrar sig matematikernas största intresse nuförtiden. Geometri i en vidare mening är dock ett högst aktivt och levande forskningsområde, men Euklides själv skulle kanske inte känna sig hemma i den.

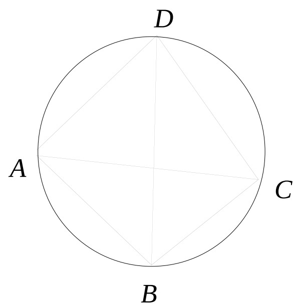
9 Ett smörgåsbord med övningar

De flesta övningarna nedan är hämtade från gamla skrivningar och ett äldre geometrikompendium. De är inte sorterade vare sig efter område eller svårighetsgrad.

1. Fyrhörningen $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Avgör i vart och ett av följande två fall om man säkert kan säga att $|BC| = |DC|$. Bevisa eller ge ett motexempel.

   a) $|AB| = |AD|$ och AC är en diameter.

   b) $|AB| = |AD|$ och BD är en diameter.



2. I fyrhörningen $ABCD$ är $|AB| = |AD|$ och $|BC| = |DC|$. Visa att diagonalerna AC och BD skär varandra under rät vinkel.

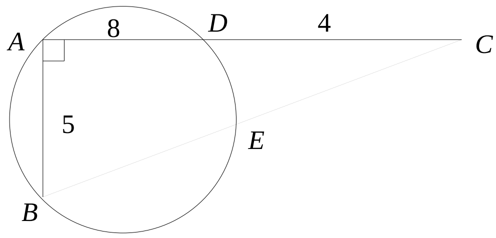
3. Fyrhörningen $ABCD$ är inskriven i en cirkel och man vet att $|AD| = |BC|$. Bevisa att AB och CD är parallella.

4. I triangeln $\triangle ABC$ är $|AB| = 3, |BC| = 5$. Tangenten i A till triangelns omskrivna cirkel skär förlängningen av BC i P. Antag att $|AP| = 6$. Bestäm $|BP|$ och $|AC|$.

5. I $\triangle ABC$ är $|AC| = |BC| = 20$ och höjden mot AB är 12. Bestäm längden av AB.

6. En regelbunden 12-hörning är inskriven i en cirkel. A och B är två närbelägna hörn i 12-hörningen. Beräkna vinkeln mellan tangenterna till cirkeln i A och B.

7. Bestäm längden av sträckan CE i figuren nedan.



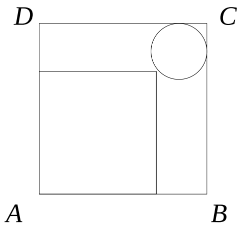
8. I $\triangle ABC$ är $|AB| = 4, |AC| = 3, |BC| = 5$. Beräkna längden av höjden från A mot BC.

9. Visa att bisektriserna till basvinklarna i en likbent triangel är lika långa.

10. Om $\triangle ABC$ vet man att $|AB| = |AC|$ och att $\wedge A$ är 30 grader. Drag tangenterna i B respektive C till den omskrivna cirkeln. Dessa skär varandra i P. Bestäm $\wedge BPC$.

11. I $\triangle ABC$ låter vi G och H vara mittpunkterna på AB respektive AC. På förlängningarna av GH avsättes D och E så att $|GD| = |GH| = |HE|$. Låt F vara skärningspunkten mellen linjerna DB och EC. Bestäm förhållandet mellan areorna av $\triangle ABC$ och $\triangle DEF$.

12. Sidorna i kvadraten $ABCD$ i figuren nedan har längd 1. Den mindre kvadraten har sidan $1/\sqrt{2}$. Cirkeln tangerar den större kvadraten samt hörnet i den mindre kvadraten. Bestäm cirkelns radie.



13. Två kordor AB och CD i en cirkel skär varandra i punkten E inuti cirkeln. Man vet att $\wedge ABC$ är rät och att $|AE| = 5, |CE| = 10, |DE| = 2$. Beräkna cirkelns radie.

14. Bevisa följande påstående ur en gammal lärobok: *Uppritar man kvadrater utåt på en triangels sidor och förenar man ändpunkterna av de från samma vinkelspets i triangeln utgående kvadratsidorna, så har de på detta sätt bildade trianglarna lika stor area sinsemellan och den gemensamma arean är lika med arean av den ursprungliga triangeln.*

15. Från Jönköping till Askersund är det drygt 12 mil fågelvägen över Vättern. Eftersom jorden är rund, så är den närmaste vägen faktiskt ”fiskvägen” eller ”mullvadsvägen” under Vätterns yta. Hur långt under sjöns yta går denna rakaste väg när den går som djupast? Jordens radie är 600 mil.

16. A är en punkt utanför en cirkel med medelpunkt M. Från A dras de båda tangenterna till cirkeln. Tangeringspunkterna är B och C. Sträckan AM förlängs från M och skär cirkeln i D. Bestäm $\wedge BDC$ om man vet att $\wedge BAC$ är 40 grader.

17. En triangel $\triangle ABC$ är inskriven i en cirkel. Bevisa att cirkelns medelpunkt ligger på bisektrisen till $\wedge A$ om och endast om triangeln är likbent med $|AB| = |AC|$.

18. I triangeln $\triangle ABC$ är $\wedge A$ rät. Vidare är $|AB| = 5$ och $|AC| = 12$. Normalen från A mot sidan BC skär BC i D. Bestäm $|AD|$.

19. $ABCD$ är en rektangel och E är en punkt på sträckan AB sådan att $\wedge CED$ är rät. Bestäm rektangelns area om $|AE| = 2, |EB| = 1$.

20. I fyrhörningen $ABCD$ dras de två diagonalerna AC och BD som skär varandra i E inuti fyrhörningen. Visa att om

$$\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|BE|}{|DE|}$$

så är $ABCD$ ett parallelltrapets.

21. Två cirklar, den ena med radien 3 och medelpunkt O_1 och den andra med radien 2 och medelpunkt O_2 tangerar varandra på utsidan. Låt L' vara linjen genom O_1 och O_2 och låt L vara en linje som tangerar båda cirklarna. Linjerna L och L' skär varandra i A. Beräkna $|AO_2|$. Ledning: Drag sträckorna O_1B_1 och O_2B_2, där B_1 och B_2 är tangeringspunkterna mellan cirklarna och L.

22. Cirklarna C_1 och C_2 har samma medelpunkt men C_2 har 50 % större radie än C_1. Sträckan AB är korda i C_2 och skär C_1 i P (och en punkt till). Man vet att $|AP| = 5$ och $|BP| = 3$. Beräkna cirklarnas radier.

23. I en regelbunden sexhörning finns två slags diagonaler. Bestäm förhållandet mellan deras längder.

24. En cirkel har medelpunkten O. Avståndet mellan O och punkten P är 12. Genom P går en linje som skär cirkeln i punkterna A och B. Man vet att $|PA| = 12, |PB| = 9$. Beräkna cirkelns radie.

25. Låt $\triangle ABC$ vara en triangel med $(\wedge A)^\circ = 90^\circ, |AB| = 3$ och $|AC| = 4$. Låt D vara fotpunkten för höjden från A mot BC och låt E vara skärningspunkten mellan bisektrisen till $\wedge A$ och sidan BC. Beräkna $|DE|$.

26. Fyrhörningen $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Bestäm $(\wedge D)^\circ$ om $|AB| = |BC| =$cirkelns radie.

27. I $\triangle ABC$ ligger D på sidan AB och E på sidan BC. Vidare är $\wedge BAE \cong \wedge BCD$. Bestäm $|CE|$ om $|EB| = 2, |AD| = 3$ och $|BD| = 4$.

28. $ABCDEFGHI$ är en regelbunden niohörning, som är inskriven i en cirkel. Kordorna AD och BE skär varandra i punkten P. Bestäm $(\wedge APB)^\circ$.

29. I $\triangle ABC$ är $\wedge B$ rät och BC är en diameter i en cirkel som skär sidan AC i D. Bestäm $|AD|$ om $|AB| = 12$ och $|BC| = 5$.

30. En cirkel är inskriven i en triangel $\triangle ABC$. Låt D vara den punkt där cirkeln tangerar AB. Bestäm $|AD|$ om $|AB| = 3, |BC| = 5$ och $|AC| = 6$.

31. Sträckan AB är diameter i en cirkel, C är en punkt på periferin och $|AC| = 5$. Vinkelräta avståndet från C till AB är 4. Beräkna $|BC|$.

32. Fyrhörningen $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Diagonalerna AC och BD skär varandra i E. Vidare är $|AB| = 6, |BC| = 6, |CD| = 4, |DA| = 7$ och $|BD| = 8$.

    a) Visa att $\triangle AED \sim \triangle BCD$. Ledning: Om O är cirkelns medelpunkt, så är $\wedge AOB \cong \wedge BOC$.

    b) Bestäm $|AE|, |BE|, |CE|$ och $|DE|$.

33. Ett parallelltrapets delas av en av diagonalerna i två likformiga trianglar. Är det säkert att parallelltrapetset är en parallellogram?

34. I $\triangle ABC$ är $\wedge B$ rät, $|AB| = 3$ och $|BC| = 4$. Bisektrisen till $\wedge A$ skär BC i D. Bestäm arean av $\triangle ACD$.

35. I $\triangle ABC$ är D en punkt på AC och E en punkt på BC sådana att $\wedge B \cong \wedge CDE$. Bestäm $|DE|$ om $|AB| = 4, |AC| = 5, |BC| = 6$ och $|CD| = 1$.

36. Stäckorna AC och BD skär varandra mitt itu. Bevisa att $ABCD$ är en parallellogram.

37. I en triangel är sidorna 13, 20 och 21 cm. Bestäm längden av höjden mot den längsta sidan.

38. $ABCD$ är en fyrhörning inskriven i en cirkel. Diagonalerna AC och BD skär varandra i punkten E och bildar där räta vinklar. Förlängningarna av kordorna AD och BC skär varandra i punkten P. Nu vet man att $|AE| = 3, |BE| = 4$ och $|DE| = 6$.

    a) Beräkna $|EC|, |AD|$ och $|BC|$.

    b) Visa att $\triangle PBD \sim \triangle PAC$ och utnyttja det till att beräkna $|PA|$ och $|PB|$.

39. Sträckorna AC och BD skär varandra i punkten E och $|AE| \cdot |BE| = |CE| \cdot |DE|$. Bevisa att $ABCD$ är en parallellogram.

40. I fyrhörningen $ABCD$ är $|AB| = |CD|$ och AB är parallell med CD. Visa att $ABCD$ är en parallellogram.

41. $\triangle ABC$ har en rät vinkel vid A och $|AB| = 6, |AC| = 8$. BD är en bisektris. Bestäm arean av $\triangle BCD$.

42. Två cirklar med radier 1 respektive 2 tangerar varandra utvändigt. Linjen L går genom medelpunkterna och L' tangerar båda cirklarna (dock ej i samma punkt). Låt linjernas skärningspunkt vara P. Bestäm avstånden mellan P och tangeringspunkterna.

43. $\triangle ABC$ är inskriven i en cirkel. Sidan AB är en diameter och sidan BC är lika lång som cirkelns radie. Bestäm $\wedge BAC$.

44. $ABCD$ är ett parallelltrapets med sidorna AB och CD parallella. Diagonalerna AC och BD skär varandra i E. Bestäm $|AE|$ och $|CE|$ om $|AB| = 6, |CD| = 4$ och $|AC| = 5$. Ledning: Vilka trianglar är likformiga?

45. I en fyrhörning $ABCD$ dras diagonalen AC. Man vet att $\wedge ADC$ och $\wedge ACB$ är räta. Bevisa att

$$|AD|^2 = |AB|^2 - |BC|^2 - |CD|^2.$$

46. I en cirkel med medelpunkt O är A och B punkter på periferin. På OBs förlängning ligger en punkt C utanför cirkeln, så att O ligger mellan C och B. Linjen genom A och C skär cirkelns periferi i punkten D. Det gäller att $|CD| = |OD|$ och vinkeln $\wedge OCD$ är 10 grader. Beräkna vinkeln $\wedge ABO$.

47. I rektangeln $ABCD$ är E en punkt på diagonalen AC. Linjen genom E parallell med AB skär AD i F och BC i G. Linjen genom E parallell med BC skär AB i H och CD i I. Visa att rektanglarna $HBGE$ och $FEID$ har samma area.

48. I en cirkel med radie 5 dras en diameter. Parallellt med diametern finns två kordor av längd 5. Vad är avståndet mellan dessa kordor?

49. I $\triangle ABC$ är $\wedge C$ rät, $|AC| = 5$ och $|BC| = 12$. Vidare är D en punkt på sidan AB och E en punkt på sidan BC sådana att DE är vinkelrät mot AB och $|DE| = 2$. Bestäm $|BE|$.

50. I $\triangle ABC$ är D mittpunkt på AB och E mittpunkt på CD. Linjen genom A och E dras ut och skär sidan BC i punkten F. Visa att $|CF|/|BF| = 1/2$. Ledning: Drag en linje genom D parallellt med AF.

51. Den regelbundna tiohörningen $ABCDEFGHIJ$ är inskriven i en cirkel. Kordorna AE och DF skär varandra i punkten K. Bestäm $\wedge EKF$.

52. På sidan AC i $\triangle ABC$ har man avsatt punkten D så att $|AD|/|DC| = 2$. Punkten E ligger på sidan BC och DE är parallell med AB. Punkten F ligger på AB och DF är parallell med BC. Beräkna förhållandet mellan areorna av $\triangle ABC$ och fyrhörningen $FBED$.

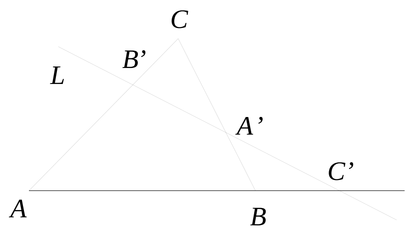
53. Triangeln $\triangle ABC$ är liksidig och sidorna har längden 3. Punkterna E, F och G ligger på AB, BC respektive CA och så att $|AE| = |BF| = |CG| = 1$. Beräkna arean av $\triangle EFG$.

54. Två cirklar har radierna 6 respektive 4 cm. Avståndet mellan deras medelpunkter är 8 cm. En linje tangerar båda cirklarna. Bestäm avståndet mellan tangeringspunkterna.

55. En linje L skär sidorna eller deras förlängningar i $\triangle ABC$ i punkterna A', B', C' som i figuren. Visa att

$$\frac{|BA'|}{|CA'|} \cdot \frac{|CB'|}{|AB'|} \cdot \frac{|AC'|}{|BC'|} = 1.$$

Ledning: Drag en linje parallell med AB genom C.



56. Hur långt är det till horisonten från toppen av Eiffeltornet? Jorden kan anses vara ett klot med radie 600 mil och Eiffeltornet är 300 m högt.

57. Två fartyg har radiomaster som når h_1 respektive h_2 meter över vattenytan. Hur långt ifrån varandra är de första gången kan få radiokontakt med varandra?

58. I en cirkel har två parallella kordor längderna 20 respektive 24. Bestäm cirkelns radie om avståndet mellan kordorna är 4.

59. I en cirkel med medelpunkt O skär kordorna AB och CD varandra i punkten P inuti cirkeln. Visa att om bisektrisen till $\wedge BPD$ går genom O, så är $|AB| = |CD|$.

60. $\triangle ABC$ är likbent. Vi har $|AB| = |AC| = 5$ och $|BC| = 8$. Bestäm avståndet från mittpunkten på sidan BC till

a) medianernas skärningspunkt.

b) inskrivna cirkelns medelpunkt.

c) höjdernas skärningspunkt.

d) omskrivna cirkelns medelpunkt.

61. Man drar mittpunktsnormalerna till sidorna en femhörning. Visa att om de alla skär varandra i en punkt, så ligger femhörningens hörn på en cirkel.

62. A, B, C och D är punkter på en cirkel med radie 2. Sträckan AB är en diameter och $|AC| = 1$. Punkten D ligger på bisektrisen till $\wedge CAB$. Låt P vara skärningspunkten mellan BC och AD. Bestäm $|AP|, |BP|, |CP|, |DP|$ och $|CD|$.

63. I en viss likbent triangel är omskrivna cirkelns radie fyra gånger så lång som inskrivna cirkelns radie. Bestäm förhållandet mellan triangelns bas och ben.

64. Från en punkt på en cirkel dras två mot varandra vinkelräta kordor, av vilka den ena är dubbelt så lång som den andra. Bisektrisen till den räta vinkeln dras ut till den träffar cirkeln. Hur lång är bisektrisen, om cirkelns radie är r?

65. En cirkel har radien r. P är en punkt som har avståndet a, som är $> r$, till cirkelns medelpunkt O. Från P drar man en tangent till cirkeln och tangeringspunkten är A. Låt B och C vara skärningspunkterna mellan cirkeln och linjen genom O och P. Beräkna $|AB|$ och $|AC|$.

66. I en cirkel är A_1A_2 och A_3A_4 två kordor som skär varandra under rät vinkel i B. Bevisa att för cirkelns radie r gäller

$$r^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2),$$

där $a_i = |A_iB|$.

67. Visa att bisektriserna till vinklarna i en parallellogram antingen skär varandra i en punkt eller bildar en rektangel.

68. Härled formler för längderna av bisektriserna och medianerna i en godtycklig triangel.

69. Bevisa att de linjer som förbinder mittpunkterna på sidorna i en godtycklig fyrhörning bildar en parallellogram.

70. En myrslok som befinner sig i A skall gå till floden för att dricka och sedan till B för att sova. Hur lång blir myrslokens promenad om den görs så kort som möjligt?